Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Landes-Universität

Rostock

vorgelegt von

Oskar Weinbaum

aus Berlin.

Berlin.

Mayer & Müller.

1906.

Die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten elliptischen Zylinder.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Landes-Universität

Rostock

vorgelegt von

Oskar Weinbaum

aus Berlin.

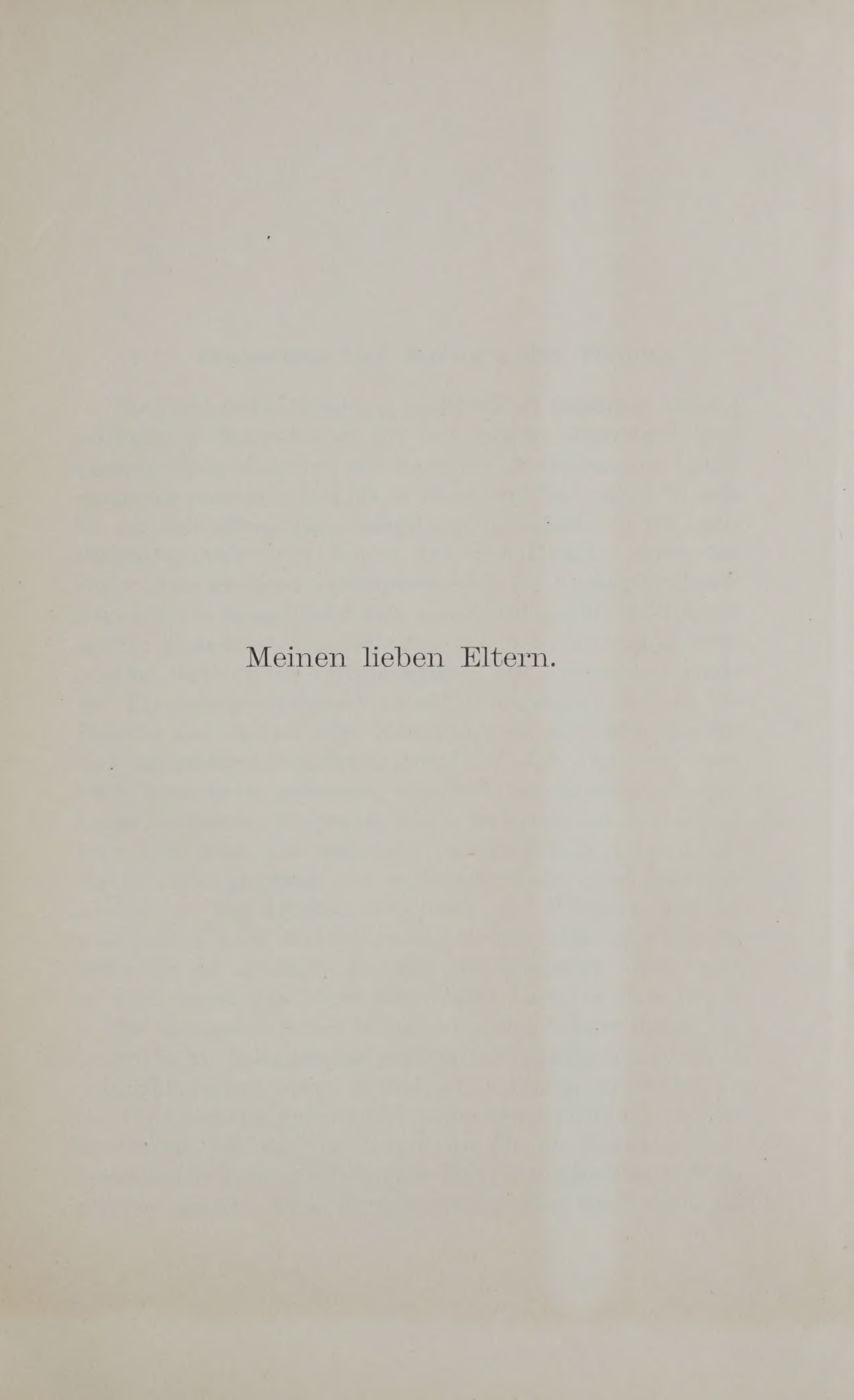
Berlin.

Mayer & Müller.

1906.

Referent: Herr Prof. Dr. phil. et med. L. Matthiessen.

Druck von H. Itzkowski in Berlin.



Meinen lieben Eltern.

§ 1. Einleitung und Stellung des Themas.

Das Problem der Spiegelung irgendwelcher Objekte in beliebig gekrümmten Spiegelflächen ist seit langem Gegenstand teils experimentell-praktischer, teils mathematisch-theoretischer Untersuchungen gewesen. Aber bis in die neueste Zeit, wie z. B. noch bei der Behandlung einer spiegelnden Kugelfläche in der „darstellenden Optik“ von Engel und Schellbach, wurde fast immer stillschweigend vorausgesetzt, daß ein leuchtender Punkt stets nur ein Spiegelbild liefert, eine Annahme, die in Wahrheit nur für „paraxiale“ Strahlenbündel gilt, d. h. für solche, deren einzelne Strahlen der Verbindungslinie von leuchtendem Punkt und Krümmungsmittelpunkt unendlich benachbart sind. — Die Tatsache nun, daß bei jeder anderen, als der paraxialen Inzidenz eine „astigmatische“ Reflexion stattfindet, d. h. daß man dann zwei voneinander getrennte, eigentlich aus unendlich kleinen Linien bestehende, Bildpunkte erhält, ist zuerst von Sturm und Kummer, dann aber besonders von Reusch, Neumann und Matthiessen graphisch und mathematisch eingehend behandelt worden. — Die Arbeiten von Bode und Bieneck sind im wesentlichen nach Matthiessenschen Methoden abgefaßt, sie behandeln die speziellen Probleme der Spiegelung einer Kugel in einer Kugel, bzw. einer unendlichen Ebene in einer Kugel.

Die vorliegende Arbeit ist nun ein ausführlicherer Beitrag zur astigmatischen Spiegelung an gekrümmten Flächen; sie untersucht „die Spiegelung einer unendlichen Ebene in einem zu ihr senkrechten geraden elliptischen Zylinder“. — Der Erörterung sind die von Neumann für die Brechung bzw. Spiegelung an beliebig gekrümmten Flächen aufgestellten Formeln zugrunde gelegt. Diese Formeln nehmen aber im Hinblick auf

die besondere Form unserer spiegelnden Fläche, sowie im Hinblick darauf, daß die zu betrachtenden einfallenden Strahlenbündel homozentrisch sind, sofort eine einfachere Gestalt an.

§ 2. Die Neumannschen Formeln und ihre Umformung.

Die Brechung bzw. Spiegelung eines auf eine krumme Oberfläche auffallenden homozentrischen Strahlenbündels geht in derjenigen Ebene vor sich, welche durch den Achsenstrahl des Bündels und durch das zum Einfallspunkt gehörige Einfallslot oder die „Normale“ der krummen Fläche gelegt wird. Diese Ebene, die „Einfallsebene“, ist also einer der vielen zu irgend einem Einfallspunkte gehörigen „Normalschnitte“. Von diesen vielen „Normalschnitten“ kommen nun für unsere Untersuchung stets zwei ganz bestimmte wesentlich in Betracht, der „Hauptnormalschnitt“ und der „Nebennormalschnitt“, welche durch die größte bzw. kleinste Krümmung ausgezeichnet sind. Der Krümmungsradius des ersteren heiße ϱ_1, der des letzteren ϱ_2 und ε sei der Neigungswinkel der Einfallsebene mit dem Hauptnormalschnitt; dann sind zunächst der Krümmungsradius ϱ' der Einfallsebene selbst und derjenige des zu ihr senkrechten Normalschnittes ϱ'' nach Euler bestimmt durch

$$\frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2\varepsilon}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varepsilon}{\varrho_2}$$

$$\frac{1}{\varrho''} = \frac{\sin^2\varepsilon}{\varrho_1} + \frac{\cos^2\varepsilon}{\varrho_2}.$$

Seien nun die Objektabszisse eines einfallenden Strahlenbündels x_0, die beiden Bildabszissen x_2 und x_1, das zugehörige Azimut ϑ_2; sei endlich der Einfallswinkel e_2, der Brechungswinkel e_1: dann gelten die folgenden von Neumann aufgestellten Formeln zur Berechnung von x_1, x_2 und ϑ_2, wobei aber das einfallende Strahlenbündel bereits als homozentrisch angenommen ist:

$$(\mathrm{Ia})\quad A\cdot\left\{-\frac{cos^2 e_2}{x_0}+\frac{sin\, e_2}{sin\, e_1}cos^2 e_1\left(\frac{cos^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{sin^2\vartheta_2}{x_1}\right)\right\}=1$$

$$(\mathrm{IIa})\quad B\cdot\left\{\frac{-1}{x_0}+\frac{sin\, e_2}{sin\, e_1}\cdot\left(\frac{sin^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{cos^2\vartheta_2}{x_1}\right)\right\}=1$$

$$(\mathrm{IIIa})\quad C\cdot\frac{sin\, e_2\cdot cos\, e_1\, sin\, 2\vartheta_2}{sin\, e_1\cdot sin\, 2\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=1,$$

worin

$$A=\frac{\varrho_1\cdot\varrho_2\cdot sin\, e_1}{(\varrho_2 cos^2\varepsilon+\varrho_1 sin^2\varepsilon)\cdot sin(e_2-e_1)},$$

$$B=\frac{\varrho_1\cdot\varrho_2\cdot sin\, e_1}{(\varrho_2 sin^2\varepsilon+\varrho_1 cos^2\varepsilon)\cdot sin(e_2-e_1)},$$

$$C=\frac{\varrho_1\cdot\varrho_2 sin\, e_1}{(\varrho_1-\varrho_2)\cdot sin(e_2-e_1)}.$$

Für die elliptische Zylinderfläche ist nun die Kurve des Nebennormalschnittes stets die gerade Seitenlinie des Mantels, mithin ist

$$\varrho_2=\infty.$$

Der Hauptnormalschnitt ist stets eine zur Zylinderbasis parallele und ihr kongruente Ellipse, mithin ϱ_1 von Punkt zu Punkt veränderlich.

Indem zunächst nur das konstante $\varrho_2=\infty$ gesetzt wird, und statt ϱ_1 der Kürze wegen ϱ geschrieben wird (da ja nicht mehr zwei Arten endlicher Krümmungsradien zu unterscheiden sind), gehen die obigen Formeln in die folgenden neuen über. (Man kürze in A, B und C durch ϱ_2 und setze ϱ_2 dann $=\infty$):

$$(\mathrm{Ib})\quad \frac{\varrho\, sin\, e_1}{cos^2\varepsilon\, sin(e_2-e_1)}\cdot\left\{-\frac{cos^2 e_2}{x_0}+\frac{sin\, e_2}{sin\, e_1}cos^2 e_1\left(\frac{cos^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{sin^2\vartheta_2}{x_1}\right)\right\}=1,$$

$$(\mathrm{IIb})\quad \frac{\varrho\, sin\, e_1}{sin^2\varepsilon\, sin(e_2-e_1)}\cdot\left\{\frac{-1}{x_0}+\frac{sin\, e_2}{sin\, e_1}\left(\frac{sin^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{cos^2\vartheta_2}{x_1}\right)\right\}=1,$$

$$\text{(IIIb)}\quad \frac{\varrho \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\sin e_2 \cdot \cos e_1 \cdot \sin 2\vartheta_2}{\sin e_1 \cdot \sin 2\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 1.$$

Setzt man nun endlich entsprechend der Spiegelung $e_2 = -e_1$ (man beachte, daß $\frac{\sin e_2}{\sin e_1} = -1$, und zerlege stets $\sin 2e_1$ in $2 \sin e_1 \cos e_1$), so ergibt sich:

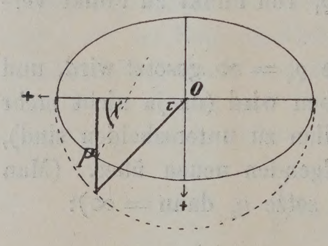
$$\text{(Ic)}\qquad \frac{\varrho \cos e_1}{2\cos^2 \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1}\right) = 1,$$

$$\text{(IIc)}\qquad \frac{\varrho}{2\sin^2 \varepsilon \cos e_1} \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1}\right) = 1,$$

$$\text{(IIIc)}\qquad -\frac{\varrho \sin 2\vartheta_2}{2\sin 2\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 1.$$

§ 3. Die Kurve des „Hauptnormalschnittes".

Die Kurve des Hauptnormalschnittes ist stets eine zur Basisellipse parallele und ihr kongruente Ellipse.



Ihre Mittelpunktsgleichungen sind

$$x = a \cos\psi, \quad y = b \sin\psi,$$

wo a und b die halben Ellipsenachsen sind und ψ die bekannte Bedeutung der „exzentrischen Anomalie" hat. Für einen bestimmten Punkt P der Ellipse, für welchen ψ den bestimmten Wert τ hat, ist

$$\text{die Subtangente} = \frac{a \sin^2 \tau}{\cos \tau},$$

$$\text{die Subnormale} = \frac{b^2}{a} \cos \tau,$$

$$\text{die Normale} = \frac{b}{a} \sqrt{b^2 \cos^2 \tau + a^2 \sin^2 \tau}.$$

Ist ferner χ der Winkel der Normalen mit der positiven X-Achse, so ergibt sich leicht

$$\cos\chi = \frac{b\cos\tau}{\sqrt{b^2\cos^2\tau + a^2\sin^2\tau}},$$

$$\sin\chi = \frac{a\sin\tau}{\sqrt{b^2\cos^2\tau + a^2\sin^2\tau}},$$

$$tg\chi = \frac{a}{b}\,tg\tau\,.$$

Endlich sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes von P:

$$\text{Abszisse} = \frac{e^2}{a}\cos^3\tau;\ \text{Ordinate} = -\frac{e^2}{b}\sin^3\tau$$

und der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{(b^2\cos^2\tau + a^2\sin^2\tau)^{\frac{3}{2}}}{a\cdot b}\,.$$

§ 4. Kann „aplanatische" Spiegelung im elliptischen Zylinderspiegel eintreten?

Bevor wir die Untersuchung der astigmatischen Spiegelung beginnen, sei hier kurz erörtert, ob etwa und unter welchen besonderen Bedingungen aplanatische Spiegelung beim elliptischen Zylinderspiegel stattfinden kann. Die aplanatische Spiegelung ist dadurch bedingt, daß die beiden, im allgemeinen getrennten, Bilder eines Objektpunktes in eins zusammenfallen, d. h. daß die Bildabszissen x_1 und x_2 gleich werden. Für diese Bedingung entsteht aus IIIc

$$\sin 2\varepsilon = 0.$$

Hieraus folgt: entweder $\varepsilon = 0^\circ$, oder $\varepsilon = 90^\circ$. Aplanatische Spiegelung könnte also, wenn überhaupt, jedenfalls nur dann

eintreten, wenn die Einfallsebene mit dem Haupt- oder Nebennormalschnitt zusammenfiele.*)

1. Für $\varepsilon = 0^0$ gehen Ic und IIc über in:

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{\varrho \cos e_1}, \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} = 0.$$

Hieraus ergäbe sich: entweder $\cos e_1 = \infty$, was unmöglich, oder $x_0 = x_2 = 0$, was im Sinne einer wirklichen Spiegelung fast bedeutungslos ist und nur einen Grenzfall andeutet.

2. Für $\varepsilon = 90^0$ entsteht ebenso:

$$\cos e_1 \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2}\right) = 0, \quad \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} = \frac{2 \cos e_1}{\varrho}.$$

Dies führt entweder ebenfalls zu der Bedingung $x_2 = x_0 = 0$; oder aber zu $e_1 = 90^0$ und dann zugleich $x_2 = - x_0$. Auch letzteres bedeutet nur einen Grenzfall wie oben; denn für $e_1 = 90^0$ müßten einfallender und reflektierter Strahl — da ja auch $\varepsilon = 90^0$ — innerhalb einer Mantellinie verlaufen, und in derselben Geraden müßte auch der Augenpunkt liegen; der Objektpunkt läge also wieder in der spiegelnden Fläche und fiele mit seinem einheitlichen Bildpunkt zusammen (was auch $x_2 = x_1 = - x_0$ besagt), nur könnte für diesen Fall jeder Punkt der Mantellinie zwischen Objekt- und Augenpunkt als Einfallspunkt in Betracht kommen.

Aplanatische Spiegelung im Sinne eines wirklich zustande kommenden, vom Objektpunkte getrennten, einheitlichen Bildpunktes ist also beim elliptischen Zylinderspiegel unmöglich. Nur für den Grenzfall, daß der Objektpunkt in der spiegelnden Fläche selbst liegt, ist ein einziger Bildpunkt vorhanden, der aber dann mit dem Objektpunkt zusammenfällt.

---

*) S. auch die allgemeine Untersuchung von Matthiessen „Aplanat. Brechung eines Strahlenb.“ Annal. d. Physik 1902.

§ 5. Umgrenzung und Einteilung der eigentlichen Untersuchung. — Die verschiedenen Gruppen von Inzidenzpunkten.

Wenden wir uns nunmehr unserer eigentlichen Aufgabe zu, so erkennen wir zuvörderst, daß bei bestimmt gewähltem Augenpunkt stets nur ein Teil der Zylinderfläche für die Spiegelung in Betracht kommt. Dieser Teil ist einerseits, wie ohne weiteres klar, durch die beiden vom Augenpunkt an die Zylinderfläche zu legenden Tangentialebenen begrenzt, andererseits durch die vom Augenpunkt aus parallel zur Objektebene verlaufende Ebene. Letzteres ist dadurch bedingt, daß zu höheren Einfallspunkten nur solche Einfallsstrahlen gehören könnten, die erst in ihrer Verlängerung über den Einfallspunkt hinaus, also in der Richtung, aus der sie nicht kommen, die Objektebene schneiden würden. Diese Parallelebene — die fernerhin als „Abschlußebene", „Abschlußhorizont" oder „Abschlußellipse" bezeichnet werden soll, — enthält die Gesamtheit derjenigen Objektstrahlen (und zugehörigen Augenstrahlen), die parallel zur Objektebene verlaufen, also von deren unendlich fernen Punkten herkommen.

Wir werden nun den Weg einschlagen, daß wir zunächst für beliebige vom Augenpunkt ausgehende Blickrichtungen, d. h. also für beliebige Einfallspunkte, die zugehörigen Objekt- und Bildpunkte berechnen. Indem wir dann bestimmte kontinuierliche Reihen von Einfallspunkten in Betracht ziehen, werden sich auch die zugehörigen kontinuierlichen Reihen von Objekt- bzw. Bildpunkten ergeben, und wir erhalten so eine Vorstellung von der Form und Lage der Bilder gewisser Linien der Objektebene. — Dann erst wird sich, was allerdings ein wesentliches Ziel unserer Arbeit bedeutet, der Weg angeben lassen, wie man zu gegebenen Objektpunkten bzw. Linien und Figuren die Bilder nach Lage, bzw. nach Lage und Form zu bestimmen hat.

In Figur I ist durch den Augenpunkt A die „Abschlußebene" parallel zur Objektebene gelegt; B ist derjenige Punkt der Abschlußellipse, dessen Normale die Richtung AB hat, seine

Projektion auf die Objektebene ist G, AB heiße die „Horizontalachse“, BG die „Vertikalachse“ des Spiegels. Durch A sind ferner die Tangentialebenen an die Zylinderfläche gelegt, die die Abschlußellipse in T und T_1 und die Basisellipse in den entsprechenden Projektionspunkten U und U_1 treffen.

Die Gesamtheit der Einfallspunkte läßt sich nun in drei Gruppen einteilen:

1. Solche Punkte, deren Einfallsebenen mit ihrem Hauptnormalschnitt zusammenfallen, die Punkte des Abschlußbogens TT_1. — Die zugehörige Inzidenz heiße „horizontal-normale“ Inzidenz.

2. Solche Punkte, deren Einfallsebenen mit ihrem Nebennormalschnitt zusammenfallen, die Punkte der „Vertikalachse“ BG. — „Vertikal-normale“ Inzidenz.

3. Solche Punkte, deren Einfallsebenen weder mit ihrem Haupt- noch mit ihrem Nebennormalschnitt zusammenfallen, also sämtliche nicht durch 1. und 2. gekennzeichnete Punkte, z. B. der beliebige Punkt E. — „Seitliche“ oder „allgemeine“ Inzidenz. — Hierher gehören auch die Punkte des unteren Begrenzungs- oder des „Grund“-Bogens UU_1, — „Grundinzidenz“, — sowie die Punkte der begrenzenden Mantellinien TU und T_1U_1 — „streifende Inzidenz“. —

Als kontinuierliche Reihen von Einfallspunkten eignen sich zur Betrachtung:

1. Die Reihe der Punkte „horizontal-normaler“ Inzidenz: Bogen TT_1.

2. Die Reihe der Punkte „vertikal-normaler“ Inzidenz: Vertikalachse BG.

3a) Reihen von Punkten „seitlicher Inzidenz in gleicher Vertikalen“, z. B. Mantellinie CJ. — Spezieller Fall: die Reihen der Punkte „streifender Inzidenz“.

3b) Reihen von Punkten „seitlicher Inzidenz in gleichem Horizont“, z. B. Bogen FF_1. — Spezieller Fall: die Reihe der Punkte der „Grundinzidenz“.

Im weiteren wird die eben gegebene Übersicht für die Reihenfolge der Untersuchung nicht maßgebend sein. Viel-

mehr werden wir zuerst den allgemeinen Fall eines beliebigen Einfallspunktes, also eines Punktes der dritten Gruppe behandeln. Hieran wird sich die Untersuchung von Punktreihen der dritten Gruppe anschließen, wobei die ersten beiden Gruppen von Punkten bzw. Punktreihen als Spezialfälle erscheinen.

§ 6. **Ausrechnung der Bildabszissen. — Deutung des Resultates für die „erste" Abbildung.**

Als Grundlage für die ganze Untersuchung sind zunächst die Bildabszissen x_1 und x_2 aus den Gleichungen Ic bis IIIc zu berechnen, indem ϑ_2 eliminiert wird. — Statt e_1 werde e geschrieben und statt $\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)$ der Kürze wegen n. — Aus IIIc folgt:

$$sin 2\vartheta_2 = 2 sin \vartheta_2 cos \vartheta_2 = -\frac{2 sin 2\varepsilon}{\varrho \cdot n}$$

$$sin^2 \vartheta_2 (1 - sin^2 \vartheta_2) = \frac{sin^2 2\varepsilon}{\varrho^2 n^2}$$

$$sin^4 \vartheta_2 - sin^2 \vartheta_2 = -\frac{sin^2 2\varepsilon}{\varrho^2 n^2},$$

also

$$sin^2 \vartheta_2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\varrho n} \sqrt{\varrho^2 n^2 - 4 sin^2 2\varepsilon},$$

und

$$cos^2 \vartheta_2 = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2\varrho n} \sqrt{\varrho^2 n^2 - 4 sin^2 2\varepsilon}.$$

Dies in Ic und IIc eingesetzt, gibt:

$$\frac{\varrho cos e}{2 cos^2 \varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) \mp \frac{1}{2\varrho n} \cdot \sqrt{} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)\right] = 1,$$

$$\frac{\varrho}{2 sin^2 \varepsilon cos e} \cdot \left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) \mp \frac{1}{2\varrho n} \cdot \sqrt{} \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)\right] = 1.$$

Setzt man $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=m$ und wie vorher: $\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=n$, so erhält man:

$$\frac{\varrho \cos e}{2\cos^2\varepsilon}\cdot\left[\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}m\mp\frac{1}{2\varrho}\sqrt{\varrho^2 n^2-4\sin^2 2\varepsilon}\right]=1,$$

$$\frac{\varrho}{2\sin^2\varepsilon\cos e}\left[\underbrace{\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}m}_{M}\pm\underbrace{\frac{1}{2\varrho}\sqrt{\varrho^2 n^2-4\sin^2 2\varepsilon}}_{N}\right]=1.$$

Also:

$$M\mp N=\frac{2\cos^2\varepsilon}{\varrho\cos e},\quad M\pm N=\frac{2\sin^2\varepsilon\cos e}{\varrho};$$

mithin

$$M=\frac{\cos^2\varepsilon+\sin^2\varepsilon\cos^2 e}{\varrho\cos e}=\frac{1-\sin^2\varepsilon\sin^2 e}{\varrho\cos e},$$

$$N=\pm\frac{\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon\cos^2 e}{\varrho\cos e};$$

d. h.

$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{2}m=\frac{1-\sin^2\varepsilon\sin^2 e}{\varrho\cos e}$$

und

$$\frac{1}{2\varrho}\sqrt{\varrho^2 n^2-4\sin^2 2\varepsilon}=\pm\frac{\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon\cos^2 e}{\varrho\cos e}.$$

Mithin ergibt sich nun:

$$m=2\left(\frac{1-\sin^2\varepsilon\sin^2 e}{\varrho\cos e}-\frac{1}{x_0}\right).$$

Ferner

$$\frac{\varrho^2 n^2-4\sin^2 2\varepsilon}{4}=\frac{(\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon\cos^2 e)^2}{\cos^2 e},$$

$$n=\pm\frac{2}{\varrho\cos e}\cdot\sqrt{(\cos^2\varepsilon-\sin^2\varepsilon\cos^2 e)^2+\sin^2 2\varepsilon\cos^2 e},$$

$$n=\pm\frac{2(1-\sin^2\varepsilon\sin^2 e)}{\varrho\cos e}.$$

Also

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \frac{2(1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e)}{\varrho \cos e} - \frac{2}{x_0},$$

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \pm \frac{2(1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e)}{\varrho \cos e};$$

mithin

$$\frac{1}{x_2} = \frac{1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e \pm (1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e)}{\varrho \cos e} - \frac{1}{x_0},$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e \mp (1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e)}{\varrho \cos e} - \frac{1}{x_0}.$$

Bezüglich des Doppelvorzeichens ist zu bemerken, daß jedenfalls in dem einen Resultat „+“ und in dem anderen „—“ zu setzen ist, da x_2 und x_1 nicht identisch gleich sein können (s. § 4). Um in der üblichen Bezeichnungsweise der Bildabszissen zu bleiben, setze man in der Formel für x_2 das Zeichen „+“, in derjenigen für x_1 das Zeichen „—“. Mithin

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2(1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e)}{\varrho \cos e} - \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{1}{x_1} = - \frac{1}{x_0}.$$

Also

$$\text{(IV)} \qquad x_2 = \frac{x_0 \cdot \varrho \cos e}{2 x_0 (1 - sin^2 \varepsilon \, sin^2 e) - \varrho \cos e},$$

$$\text{(V)} \qquad x_1 = - x_0.$$

Da die Gleichung V nichts mehr von der besonderen Beschaffenheit der Einfallsstelle (ϱ), noch auch von den besonderen Bedingungen des Einfalles (ε und e) enthält, so ist ihre Diskussion ohne weiteres in erschöpfender Allgemeinheit möglich, und werde hier gleich hinzugefügt. Das „erste“ Bild irgend eines Objektpunktes befindet sich — nach V — stets in derselben Entfernung vom Einfallspunkt auf dem hinter den Spiegel verlängerten Augenstrahl, in welcher das Objekt auf dem Objektstrahl vor dem Spiegel liegt. Dies gilt ganz allgemein für jede beliebige

Lage des Objektpunktes — auch außerhalb unserer zu spiegelnden Ebene —, und für jeden beliebigen Augenpunkt. Einer einfachen geometrischen Überlegung zufolge kann man auch sagen: Der „erste“ Bildpunkt irgend eines Objektpunktes liegt stets soweit hinter der im jeweiligen Einfallspunkt zu konstruierenden Tangentialebene, als der Objektpunkt vor ihr liegt, und zwar auf dem von letzterem auf jene Ebene zu fällenden Lot. Hieran erkennt man, inwieweit die unendlich große, also der Ebene entsprechende, Krümmung des Nebennormalschnittes — nämlich der betreffenden Mantelgeraden — die Lage des „ersten“ Bildpunktes bedingt. Bezüglich dieses Bildpunktes ist die spiegelnde Zylinderfläche einfach stets durch eine im Einfallspunkte berührende ebene Spiegelfläche ersetzt zu denken. Nur ist eben bei unserem Zylinderspiegel je nach Lage des Augen- und damit des Einfallspunktes diese Ersatzebene für denselben Objektpunkt immer wieder eine andere, und daher ist — im Gegensatz zum wirklichen ebenen Spiegel — der zu demselben Objektpunkt gehörige „erste“ Bildpunkt je nach Lage des Augenpunktes auch immer wieder ein anderer. — Für $x_0 = 0$ ergibt sich $x_1 = 0$ und, wie man leicht erkennt, auch $x_2 = 0$, ein Fall, der also, wie hier gleich in Ergänzung des § 4 hinzugefügt sei, für jede beliebige Lage des Augenpunktes eintreten kann. Dieser Fall „$x_1 = x_2 = x_0 = 0$“ steht eben als ein bloßer Grenzfall — in dem von einer bilderzeugenden Spiegelung gar nicht mehr die Rede ist — außerhalb der die wirkliche aplanatische Spiegelung beschränkenden Bedingung, daß $\varepsilon = 0^0$ oder $= 90^0$.

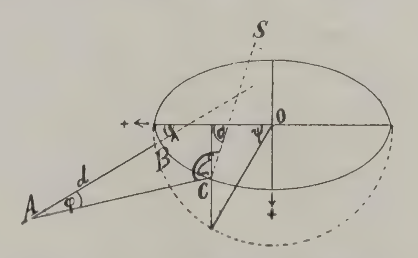
§ 7. Die „seitliche“ oder „allgemeine“ Inzidenz.

Indem wir jetzt zu der Erörterung der einzelnen Inzidenzarten, und zwar zunächst zu derjenigen der seitlichen oder allgemeinen Inzidenz übergehen, wird es sich im wesentlichen nur noch um die „zweite“ Abbildung, also um die Diskussion der Gleichung IV handeln. Es kommt darauf an, x_2, das sich als Funktion von ε, e, ϱ und x_0 darstellt, nach Festsetzung derjenigen Größen, die eine bestimmte Blickrichtung definieren, als

Funktion eben dieser Größen umzurechnen. Hierbei kommen noch die Konstanten des Zylinders, nämlich die Halbachsen a und b der Basisellipse und der Abstand h zwischen Basis- und Abschlußebene in Rechnung. Ferner sind als Konstanten des festen Augenpunktes A einzuführen: entweder sein Abstand d von demjenigen Punkt B der Abschlußellipse, dessen Normale die Richtung AB hat, und die exzentrische Anomalie τ von B; oder aber die Koordinaten u und v von A, bezogen auf die Achsen der Abschlußellipse als Koordinatenachsen. u und v sind aus d und τ leicht zu berechnen, und umgekehrt; daher dürfen wir über alle vier Konstanten beliebig verfügen. Hierzu kommt endlich noch der Winkel χ, den die Normale von B mit der positiven Richtung der großen Ellipsenachse bildet, und der nach § 3 durch

$$tg\chi = \frac{a}{b} tg\tau$$

bestimmt ist. — Außer diesen „absolut konstanten" Größen seien folgende variabeln Größen eingeführt (Fig. I): Der „Augenstrahl" AE des Einfallspunktes E habe die Länge q, seine Projektion auf die Abschlußebene AC habe die Länge p und bilde mit der Horizontalachse AB den „Azimutwinkel"



$$CAB = \varphi,$$

mit dem Augenstrahl den „Höhenwinkel" $CAE = \omega$ und endlich mit der Normalen CS von C den Winkel $ACS = \zeta$. Der Punkt C habe die exzentrische Anomalie ψ, und CS bilde mit der positiven Richtung der großen Ellipsenachse den Winkel σ. Um ε, e, ϱ und x_0 auf φ und ω, die eine bestimmte Blickrichtung festlegen, zurückzuführen, bedürfen wir, wie sich später zeigen wird, der Kenntnis von ζ.

Es ergibt sich nun sofort, entsprechend der bekannten Beziehung zwischen χ und τ, auch für σ:

(1) $$tg\sigma = \frac{a}{b} tg\psi$$

und dann:

$$\zeta = \pi - \varphi - (\sigma - \chi)$$

oder

(2) $$\zeta = \pi - \varphi + \chi - \sigma.$$

Um also ζ für einen bestimmten Wert von φ zu erhalten, ist erst noch ψ zu berechnen. — Dies geschehe analytisch in dem Koordinatensystem, dessen Achsen die Ellipsenachsen sind, und dessen positiver Quadrant dadurch bestimmt sein soll, daß in ihm die Punkte A und B liegen. AC schneidet die Abszissenachse unter dem Winkel $\chi - \varphi$ (gegen die positive Richtung). Da u und v die Koordinaten von A sind, so ergibt sich für die Gerade AC:

$$y - v = (x - u) \cdot tg(\chi - \varphi),$$

also für den Schnittpunkt C mit der Ellipse, indem man noch setzt:

(3) $$tg(\chi - \varphi) = \lambda,$$

$$b\sin\psi - v = (a\cos\psi - u)\lambda,$$

$$b\sin\psi = a\lambda\cos\psi - (u\lambda - v),$$

$$b^2(1 - \cos^2\psi) = a^2\lambda^2\cos^2\psi - 2a\lambda\cos\psi(u\lambda - v) + (u\lambda - v)^2,$$

$$\cos^2\psi - 2\cos\psi \cdot \frac{a\lambda(u\lambda - v)}{a^2\lambda^2 + b^2} - \frac{b^2 - (u\lambda - v)^2}{a^2\lambda^2 + b^2} = 0,$$

also

$$\cos\psi = \frac{a\lambda(u\lambda - v) \pm \sqrt{a^2\lambda^2(u\lambda - v)^2 + [b^2 - (u\lambda - v)^2] \cdot [a^2\lambda^2 + b^2]}}{a^2\lambda^2 + b^2},$$

(4) $$\cos\psi = \frac{a\lambda(u\lambda - v) \pm b \cdot \sqrt{-(u\lambda - v)^2 + a^2\lambda^2 + b^2}}{a^2\lambda^2 + b^2}.$$

Die Anwendung der bisher entwickelten Gleichungen in der Reihenfolge (3), (4), (1), (2) liefert also für bestimmte φ die zugehörigen ψ und ζ. Bezüglich der Gleichung (4) ist zu be-

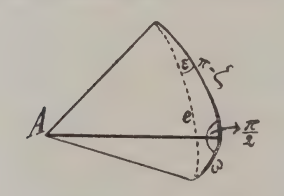
merken: Die Spiegelachsenebene $ABGH$ (Fig. I) teilt die Objektebene und die spiegelnde Fläche in je zwei Gebiete, dermaßen, daß die Punkte der einen Seite der spiegelnden Fläche als Einfallspunkte stets nur zu Objektpunkten der entsprechenden Seite der Objektebene führen; auch die Berechnung greift mit keinem Stücke je von der einen Seite auf die andere hinüber. Folglich kann die Rechnung für die beiden Teile vollständig getrennt werden; nur müssen die für einen Teil gemachten Festsetzungen bezüglich der vorkommenden Größen und ihrer Vorzeichen in diesem Teile dauernd beachtet werden. — Die Rechnung wird nun dadurch auf beiden Seiten ganz gleichartig, daß wir das Azimut φ von der Horizontalachse AB aus nach beiden Seiten positiv rechnen, die X-Achse (große Ellipsenachse) hinsichtlich ihrer positiven Richtung für beide Rechnungen in gleicher Weise, dagegen die positive Richtung der Y-Achse (kleine Ellipsenachse) in den beiden Rechnungen entgegengesetzt annehmen. Hierdurch wird zugleich der für die eine Rechnung als positiv angenommene Drehungssinn für τ und ψ bei Berechnungen auf der anderen Seite negativ. Sind also die Gleichungen (1) bis (4) tatsächlich für das spiegelnde Flächenstück $BTUG$ abgeleitet (vgl. die Festsetzung über den positiven Quadranten S. 18), so ist für Berechnungen in dem Teile BT_1U_1G in (3) $\chi = -\chi$ (weil $\tau = -\tau$) und dann in (4) $v = -v$ zu setzen. Für die zu benutzenden Resultate von (4) gilt folgendes: Bei Berechnungen im Flächenstück $BTUG$ kommen nur positive ψ des ersten oder zweiten Quadranten in Betracht, und zwar ist derjenige Wert der richtige, der mittelst (1) und (2) ein ζ ergibt, das positiv ist und $> \frac{\pi}{2}$ und $< \pi$ ist. Bei Berechnungen im Flächenstück BT_1U_1G kommen nur positive oder negative ψ des ersten Quadranten in Betracht, und zwar muß wieder ζ positiv und $> \frac{\pi}{2}$ und $< \pi$ werden, wobei für negatives ψ nach (1) auch ein negatives σ in Ansatz kommt. Ist es ein negatives ψ (mit zugehörig negativem σ), das der obigen Bestimmung für ζ Genüge leistet, so liegt der dadurch gekenn-

zeichnete Ellipsenpunkt zwischen B und dem positiven Scheitel der großen Achse*).

Aus ψ folgt nun sofort der Krümmungsradius ϱ des Einfallspunktes E innerhalb des Hauptnormalschnittes; er ist derselbe, wie der seines Projektionspunktes C auf die Abschlußellipse, also nach § 3:

$$(5) \qquad \varrho = \frac{[b^2 cos^2 \psi + a^2 sin^2 \psi]^{\frac{3}{2}}}{a \cdot b}.$$

Endlich kann auch die Berechnung von ε, e und x_0 aus φ und ω mittelst der Hülfsgröße ζ durchgeführt werden. — In Figur II, einer Erweiterung der Figur I, ist P der zum Einfallspunkt E gehörige Objektpunkt, $PE = x_0$ der Objektstrahl, J die Projektion des Einfallspunktes auf die Objektebene, ebenso $PJ = l$ die Projektion des Objektstrahles; die Abschnitte der Seitenlinie CJ sind $CE = s_1$ und $EJ = s_2$. JL bzw. JK, die Normale von J, ist zugleich die Projektion der Normalen EN von E und der Normalen CS von C, endlich ist HJ zugleich die Projektion von AC und AE. AQ, EN und PR sind die Durchschnittsgeraden der Einfallsebene bezüglich mit der Abschlußebene, dem Hauptnormalschnitt und der Objektebene. — Wir erhalten nun folgende Winkelbeziehungen. Der Winkel der Einfallsebene gegen die eben genannten drei Ebenen ist jedesmal $= \varepsilon$. Da ferner $ACS = \zeta$, so ist $CAQ = \pi - \zeta$; weiter ist $AEN = PEN = e$, mithin auch $QAE = EPR = e$. Da $HJK = \zeta$, so ist $LJH = \pi - \zeta$. Nun halbiert die Gerade NE den Winkel der Geraden AE und PE, also müssen sich die Projektionen dieser drei Geraden auf dieselbe Ebene, hier auf die Objektebene, einem bekannten stereometrischen Satze gemäß, ebenso verhalten, d. h.



*) Enthält der Bogen BT^1 des Flächenstückes BT^1U^1G den positiven Scheitel der großen Ellipsenachse gar nicht, so ist evidenterweise ψ für diese ganze Seite negativ. Unsere Festsetzungen werden, richtig und konsequent angewendet, sämtlichen Möglichkeiten von Augenpunktslagen gerecht.

$LJP = LJH = \pi - \zeta$, mithin auch $JPR = \pi - \zeta$. — In den beiden dreiseitigen Ecken mit dem Scheitel A und den Kanten AE, AC, AQ, bzw. mit dem Scheitel P und den Kanten PE, PJ, PR wird nun an den entsprechenden Kanten AC und PJ der Winkel $\frac{\pi}{2}$ gebildet. Erstere Ecke enthält also folgende fünf Stücke in entsprechender Reihenfolge: $\omega, \frac{\pi}{2}, \pi - \zeta, \varepsilon, e$; und die Ecke P die vier Stücke: $\frac{\pi}{2}, \pi - \zeta, \varepsilon, e$; mithin sind die beiden Ecken kongruent, und der Winkel $EPJ = \omega$.

Es folgt nun (Nepersche Regel)

$$\sin(\pi - \zeta) = \operatorname{ctg} \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \omega,$$

also

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\sin \zeta}$$

ferner

$$\text{(7)} \qquad \cos e = - \cos \zeta \cdot \cos \omega .$$

Um nun x_0 und seine ebenso wichtige Projektion l zu erhalten, bestimmt man zuerst

$$\text{(8)} \qquad p = \sqrt{(u - a \cos \psi)^2 + (v - b \sin \psi)^2}.$$

Dann folgt leicht:

$$x_0 = \frac{s_2}{\sin \omega} = \frac{h - s_1}{\sin \omega},$$

oder

$$\text{(9)} \qquad x_0 = \frac{h - p \operatorname{tg} \omega}{\sin \omega} = \frac{h}{\sin \omega} - \frac{p}{\cos \omega}$$

und

$$\text{(10)} \qquad l = h \operatorname{ctg} \omega - p.$$

Rechnet man mit den Strecken:

s_1 [(11) $s_1 = p \cdot \operatorname{tg} \omega$]

s_2 [(12) $s_2 = h - p \operatorname{tg} \omega$]

$$q \quad \left[(13) \quad q = \sqrt{p^2 + s_1^2} = \frac{p}{\cos\omega}\right],$$

so erhält man aus (9) und (10) oder direkt durch Proportionen an den Dreiecken EPJ und EAC:

$$(9\text{a}) \qquad x_0 = q \cdot \frac{s_2}{s_1}$$

$$(10\text{a}) \qquad l = p\frac{s_2}{s_1} \qquad (= x_0 \cos\omega).$$

Ferner ist nach (6):

$$\sin^2\varepsilon = \frac{tg^2\varepsilon}{1 + tg^2\varepsilon} = \frac{tg^2\omega}{\sin^2\zeta + tg^2\omega}$$

und nach (7):

$$\sin^2 e = 1 - \cos^2 e = 1 - \cos^2\zeta \cos^2\omega,$$

also

$$1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 e = 1 - \frac{tg^2\omega(1 - \cos^2\zeta\cos^2\omega)}{\sin^2\zeta + tg^2\omega}$$

$$= \frac{(\sin^2\zeta + \sin^2\omega\cos^2\zeta)\cdot\cos^2\omega}{\sin^2\zeta\cos^2\omega + \sin^2\omega},$$

also

$$(14) \qquad 1 - \sin^2\varepsilon \cdot \sin^2 e = \cos^2\omega.$$

Endlich gibt dann IV nach (7), (9) und (14):

$$(15) \qquad x_2 = -\frac{(h - p\,tg\,\omega)\varrho\cos\zeta}{2(h - p\,tg\,\omega)\cos\omega + \varrho\cos\zeta\cdot\sin\omega},$$

oder nach (7), (9a), (13) und (14)

$$(15\text{a}) \qquad x_2 = -\frac{q\cdot\frac{s_2}{s_1}\cdot\varrho\cos\zeta}{2p\cdot\frac{s_2}{s_1} + \varrho\cos\zeta} \qquad \left(= -\frac{x_0\cdot\varrho\cos\zeta}{2x_0\cos\omega + \varrho\cos\zeta}\right).$$

Die Formeln (9a), (10a) und (15a) sind für die rein graphische Lösung unseres Problems besonders geeignet, weil p, q, s_1, s_2, ϱ und ζ von Punkt zu Punkt unmittelbar geometrisch vorliegen. — Für alle Rechnungen und Zeichnungen ist zu beachten,

daß gemäß dem Charakter der Neumannschen Formeln die vor dem Spiegel befindlichen Strecken x_0, p, q, l bezüglich des Vorzeichens umgekehrt in Rechnung zu bringen sind, wie die hinter dem Spiegel befindlichen x_2, x_1 und ϱ.

§ 8. **Seitliche Inzidenz in gleicher Vertikalen.**

Wir betrachten jetzt als kontinuierliche Reihe von Einfallspunkten diejenigen einer Vertikalen der Zylinderfläche, etwa der durch E gehenden Mantellinie CJ (Fig. II), und wollen die zugehörige Folge von Objekt- und „zweiten" Bildpunkten auffinden. Es bleibt also φ konstant, während ω zwischen 0^0 und einem Winkel variiert, für den $tg\,\omega = \frac{h}{p}$ ist. Mit φ bleibt auch ζ konstant, was sowohl durch die Anschauung, als durch die Unabhängigkeit der Gleichungen (1) bis (4) von ω bedingt ist. Da ferner die Projektion jedes Augenstrahles immer dieselbe ($= HJ$) und ihr Winkel mit der Projektion des Objektstrahles auch konstant $= 2(\pi - \zeta)$ bleibt, so fallen auch die Projektionen aller Objektstrahlen, und damit alle Objektpunkte selbst in eine Gerade PJ. — Dieser „Objektgeraden" entspricht eine ganz bestimmte „zweite" Bildkurve; einzelne Punkte derselben sind in der Weise zu berechnen bzw. zu konstruieren und zu den zugehörigen Objektpunkten in Beziehung zu setzen, daß man für einzelne Inzidenzpunkte, d. h. für einzelne Werte von ω, nach (1) bis (15) die zugehörigen Werte von x_0, l und x_2 berechnet bzw. konstruiert und nun x_2 vom Einfallspunkt aus auf dem jeweiligen Augenstrahl hinter dem Spiegel und l vom Fußpunkt der Vertikalen auf der Objektgeraden abträgt. — Für die zeichnerische Darstellung kommen aus den früher angegebenen Gründen sofort (9a), (10a) und (15a) zur Anwendung, wobei statt des variierenden ω der variierende Quotient $\frac{s_2}{s_1}$ eintritt. Beachtet man die Schlußbemerkung des § 7 und führt statt ζ zugleich seinen Supplementwinkel e ein, nämlich den Einfallswinkel innerhalb der Abschlußebene

$$(\cos\zeta = -\cos e),$$

so liefern (15) und (15a) die absolute Länge von x_2, indem man direkt e statt ζ schreibt und nun keinerlei Vorzeichenverschiebung mehr vornimmt. — Hinsichtlich der Endpunkte unserer Kurve ergibt sich:

Für $tg\,\omega = \frac{h}{p}$ (Einfallspunkt J) wird:

nach (9) $x_0 = 0$, nach (15) $x_2 = 0$.

Für $\omega = 0$ (Einfallspunkt C) wird:

$$x_0 = 0,\ x_2 = -\frac{\varrho\cos\zeta}{2} = \frac{\varrho\cos e}{2}.$$

Das Resultat ist: Zu Einfallspunkten gleicher Vertikalen gehört als Objektlinie eine unendliche Gerade, die vom Fußpunkt jener Vertikalen, unter einem Winkel von $2(\pi - \zeta)$ gegen die gemeinsame Augenstrahlenprojektion ausgeht; und als „zweite" Bildpunktkurve eine Kurve, die von eben jenem Fußpunkt ziemlich steil aufsteigend, sich von der Inzidenzvertikalen entfernt und in einem Punkte der Abschlußebene endet, der in der Entfernung $\frac{\varrho\cos e}{2}$ vom zugehörigen Einfallspunkt auf dem hinter den Spiegel verlängerten Augenstrahl liegt. — Der Winkel $2(\pi - \zeta)$ zwischen der gemeinsamen Ebene aller Augenstrahlen (derselben Inzidenzvertikalen) und derjenigen aller Objektstrahlen wird immer kleiner, je näher die Inzidenzvertikale dem Augenpunkte ist (je größer also ζ ist); er wird $= 0$ für $\zeta = \pi$, d. h. bei „vertikal-normaler" Inzidenz, wo alle Augen- und Objektstrahlen in dem gemeinsamen Nebennormalschnitt als Einfallsebene vereinigt sind. Jener Neigungswinkel wird desto größer, je ferner die Inzidenzvertikale dem Augenpunkte ist (je kleiner also ζ ist); er wird $= 2\pi$ für $\zeta = \frac{\pi}{2}$, d. h. bei „streifender" Inzidenz, wo alle Augen- und Objektstrahlen in einer zum gemeinsamen Nebennormalschnitt senkrechten Einfallsebene vereinigt sind.

Diese beiden Grenzfälle werden, unserem Plane gemäß, noch besonders behandelt.

Die „erste“ Abbildung unserer Objektgeraden ist, nach der allgemeinen Diskussion von V in § 6, eine Gerade, die in der hinter dem Spiegel erweiterten Objektebene vom Fußpunkt J der Inzidenzvertikalen aus ins Unendliche geht und zwar symmetrisch zur Objektgeraden in bezug auf die den Zylinder in der Inzidenzvertikalen berührende Ebene. Sie ist also die Durchschnittsgerade der hinter den Spiegel erweiterten Augenstrahlenebene (der „Bildstrahlenebene“) mit der Objektebene. — In Figur II ist für die Inzidenzvertikale CJ und die zugehörige Objektgerade PJ die Gerade der „ersten“ Bildpunkte blau, die Kurve der „zweiten“ Bildpunkte in ihrem ungefähren Verlauf rot gezeichnet. Eine genauere graphische Behandlung enthält Fig. VI in § 13.

§ 9. **Streifende Inzidenz.**

Bei der „streifenden“ Inzidenz haben wir als Einfallspunkte die Punkte derjenigen beiden Mantellinien TU und $T_1 U_1$ zu betrachten, in denen die durch den Augenpunkt A gehenden Tangentialebenen den Zylinder berühren. Hier ist $\zeta = \frac{\pi}{2}$. — Die Bestimmung der Grenzwerte von φ, für welche auf beiden Seiten der Horizontalachse AB die streifende Inzidenz eintritt, ist zwar für die allgemeine Diskussion belanglos, jedoch sind diese Werte leicht zu berechnen:

$$\zeta = \frac{\pi}{2}$$

gibt nach (2)

$$\text{(2b)} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \chi - \sigma;$$

also

$$\chi - \varphi = \sigma - \frac{\pi}{2}; \; tg(\chi - \varphi) = - ctg\sigma,$$

mithin nach (1)

$$(3\,\text{b}) \qquad tg(\chi - \varphi) = -\frac{b}{a}\, ctg\, \psi.$$

Dies statt λ in die allgemeine Gleichung für ψ eingesetzt [gleich hinter (3) in § 7], gibt:

$$b \sin\psi - v = -(a\cos\psi - u)\frac{b}{a}\, ctg\,\psi$$

$$ab\sin^2\psi - av\sin\psi = -ab\cos^2\psi + bu\cos\psi$$

$$av\sin\psi = ab - bu\cos\psi,$$

dies quadriert:

$$a^2v^2 - a^2v^2\cos^2\psi = a^2b^2 - 2aub^2\cos\psi + b^2u^2\cos^2\psi,$$

$$\cos^2\psi - 2\cos\psi\frac{aub^2}{a^2v^2 + b^2u^2} + \frac{a^2b^2 - a^2v^2}{a^2v^2 + a^2u^2} = 0,$$

$$(4\,\text{b}) \qquad \cos\psi = \frac{aub^2 \pm av\sqrt{-a^2b^2 + a^2v^2 + b^2u^2}}{a^2v^2 + b^2u^2}.$$

Aus ψ folgt σ nach (1) und dann φ aus (2b). In (4b) wäre für die Inzidenz in $TU: v = v$, für diejenige in $T_1U_1 : v = -v$ zu setzen (vgl. die Bemerkung zu (4) in § 7). Wegen des Doppelvorzeichens $\pm$ ändert das aber an der Formel nichts, daher ist (4b) in der obigen Fassung für beide Grenzwerte gleichmäßig zu benutzen, jedoch mit der Maßgabe, daß wieder für die Inzidenz in TU nur positive Werte von ψ im I. oder II. Quadranten, für diejenige in T_1U_1 nur positive oder negative ψ-Werte des I. Quadranten zu wählen sind, so zwar, daß dann φ nach (2b) stets positiv wird. — Für die Inzidenz in TU ist χ und σ positiv, für diejenige in T_1U_1 ist χ negativ, σ aber mit dem entsprechenden Vorzeichen von ψ anzusetzen.

Aus $\zeta = \frac{\pi}{2}$ folgt durch Anschauung oder auch nach (6) bzw. (7), daß $\varepsilon = \omega$ und $e = \frac{\pi}{2}$. Dann folgt aus (IV) oder auch aus (15) oder (15a), daß für jedes ω bzw. $\frac{s_2}{s_1}$ (auch für die bekannten Grenzen) stets

$$x_2 = 0;$$

die Reihe der „zweiten" Bildpunkte fällt also mit der Inzidenzgeraden zusammen, indem zu jedem Inzidenzpunkt er selbst als Bildpunkt gehört. — Aus den Grenzwerten von ψ folgt nun auch zunächst das zugehörige p aus (8) und dann für variierendes ω oder $\frac{s_2}{s_1} : x_0$ und l aus (9) und (10) oder (9a) und (10a) $\left(\text{Grenzen: } x_0 = \infty \text{ für } \omega = 0^0;\ x_0 = 0 \text{ für } tg\,\omega = \frac{h}{p}\right)$.
— Die streifende Inzidenz ist der eine Grenzfall der „seitlichen Inzidenz in gleicher Vertikalen" (s. § 8), bei welchem der Winkel $2(\pi - \zeta)$ zwischen der gemeinsamen Ebene der Objektstrahlen und derjenigen der Augenstrahlen das Maximum π erreicht, mithin die rückwärtige Erweiterung der letzteren, d. h. die Bildstrahlenebene mit der Objektstrahlenebene zusammenfällt. Daher fällt hier — gemäß der allgemeinen Diskussion am Schluß des § 8 — die „erste" Bildgerade geradezu mit der Objektgeraden zusammen, indem jeder Punkt in dem einen Sinne sich selbst im anderen Sinne entspricht, — diesmal in völliger Übereinstimmung mit dem ebenen Spiegel (vgl. § 6) —. Den gewonnenen Resultaten gemäß ist in Fig. III, welche die „streifende Inzidenz" für die Inzidenzgerade TU darstellt, TU zugleich die „zweite" Bildpunktlinie (rot) und die Objektgerade UP_∞ zugleich die „erste" Bildpunktlinie (blau). Einige entsprechende Inzidenz- und Objektpunkte (E und P) sind durch gleiche Indizes gekennzeichnet.

§ 10. **Vertikal-normale Inzidenz.**

Bei der „vertikal-normalen" Inzidenz sind diejenigen Punkte als Einfallspunkte ins Auge zu fassen, für welche die Einfallsebene mit dem Nebennormalschnitt zusammenfällt. Es sind das die Punkte der dem Augenpunkt nächsten Mantellinie, der Vertikalachse BG. — Hier ist $\varphi = 0$ und $\zeta = \pi$. Es ist dies der andere Grenzfall der „allgemeinen (seitlichen) Inzidenz in gleicher

Vertikalen“, bei dem der Winkel $2(\pi - \zeta)$ zwischen der gemeinsamen Ebene der Objektstrahlen und derjenigen der Augenstrahlen das Minimum 0 erreicht, mithin beide zusammenfallen, die Bildstrahlenebene aber in die hinter den Spiegel erweiterte Augenstrahlenebene fällt.

Der ursprünglichen Bedingung $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ (s. § 5 die Einteilung der Punktgruppen) entspricht nicht nur nach Anschauung, sondern auch nach der allgemeinen Gleichung (6), daß $\zeta = \pi$; ebenso folgt wieder aus der Bedingung $\zeta = \pi$ sowohl nach Anschauung als nach (7), daß $e = \omega$.

x_1 und x_2 lassen sich für unseren Fall besonders leicht, mit bequemster Elimination von ϑ_2, aus Ic bis IIIc berechnen. Es wird nämlich für $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ in IIIc: $\sin 2\vartheta_2 = 0$, also $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ oder $= 0$. Den einen oder den anderen Wert in Ic und IIc eingesetzt, erhalten wir jedenfalls dasselbe Wertepaar für x_1 und x_2, nur daß die Indizes vertauscht sind. — Um, wie schon im § 6, mit der üblichen Bezeichnung der Abszissen in Übereinstimmung zu bleiben, setzen wir $\vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$ und erhalten:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2\cos e}{\varrho} - \frac{1}{x_0}, \quad \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_0};$$

also

$$x_2 = \frac{x_0 \cdot \varrho}{2x_0 \cos e - \varrho}, \quad x_1 = -x_0.$$

Dieses Resultat entspricht natürlich auch den allgemeinen Formeln IV und V, wenn man dort $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ setzt —. x_2 würde sich auch aus (15) in Verbindung mit (9) ergeben, wenn man $\zeta = \pi$ und $\omega = e$ setzt (man kürze in (15) durch $\sin\omega$).

Ferner wird, da hier $p = d$ ist, nach (9)

$$x_0 = \frac{h}{\sin e} - \frac{d}{\cos e}$$

und nach (10)

$$l = h\,ctg\,e - d.$$

Für die Grenzwerte des variierenden ω bzw. e ist:

1. für $tg\,\omega = \frac{h}{p} = \frac{h}{d}$ (Inzidenz in G): nach (9)

$$x_0 = 0;$$

dann nach obigem oder (15)

$$x_2 = 0;$$

2. für $\omega = 0$ (Inzidenz in B):

$$x_0 = \infty \qquad x_2 = \frac{\varrho}{2}.$$

Bei allen Rechnungen erhält ϱ seinen Wert aus (5), indem man dort $\psi = \tau$ setzt.

Was die graphische Darstellung anlangt, so ist nach der Erörterung eingangs dieses Paragraphen die „erste" Bildgerade die Verlängerung der Objektgeraden, die ihrerseits mit der Augenstrahlenprojektion zusammenfällt. — Für die „zweite" Bildpunktlinie sind die einzelnen Punkte nach der obigen Formel für x_2 zu konstruieren, wobei man, um nur Strecken einer Richtung zu haben (vgl. Schluß § 7), am besten schreibt: $x_2 = \frac{x_1 \cdot \varrho}{2 x_1 \cos e + \varrho}$. Danach ist in Fig. IV die Konstruktion für den beliebigen Einfallspunkt D folgendermaßen ausgeführt. Die Horizontalachse $AB = d$ ist über B um sich selbst verlängert bis A_1. $A_1 D$ trifft in der Verlängerung über D als „Objektstrahl" die Objektebene bzw. Objektgerade im Objektpunkt P, so daß $DP = x_0$, $PG = l$. Der über D verlängerte „Augenstrahl" AD trifft als „Bildstrahl" die hinter den Spiegel verlängerte Objektgerade im „ersten" Bildpunkt Y, so daß $DY = x_1 = - x_0$. DZ ist in D lotrecht zu BG und gleich ϱ, (letzteres konstant für alle Punkte von B bis G). Die Verbindungslinie von Z und P schneidet DY im „zweiten" Bildpunkt X. In der Tat erhält DX gemäß den Proportionen der Figur den verlangten Wert von x_2; dasselbe gilt für x_0, l und x_1. — GY_∞ (blau) ist die vollständige „erste", GX_∞ (rot) die vollständige „zweite" Abbildung der Objektgeraden GP_∞.

§ 11. Seitliche Inzidenz in gleichem Horizont.

Bei der seitlichen Inzidenz in gleichem Horizont ist die Gesamtheit der Punkte eines zur Basisellipse parallelen Ellipsenbogens als kontinuierliche Reihe von Einfallspunkten zu betrachten, z. B. die des Bogens FF_1. Hierbei geht φ von 0^0 bis zu seinen beiderseitigen Grenzwerten (s. § 9). ω bleibt nicht etwa für einen bestimmten Bogen konstant, sondern das gemeinsame für die Punkte eines solchen ist, daß für sie $\frac{s_2}{s_1}$ konstant ist. — Für die Berechnung von x_0, l, x_2 kommen wieder (3), (4), (1), (2), (5), (8) und (13) und dann gleich (9a), (10a), (15a) mit konstantem $\frac{s_2}{s_1}$ zur Anwendung, für die Zeichnung aus den bekannten Gründen sofort (9a), (10a) und (15a). Was die Grenzpunkte F und F_1 des Inzidenzbogens anlangt, so ist für sie, da streifende Inzidenz vorliegt, $x_2 = 0$ (s. § 9), in x_0 und l haben p und q die den Grenzwerten von φ bzw. ψ entsprechenden Spezialwerte.

Über die Objektpunktkurve, die einem bestimmten horizontalen Inzidenzbogen entspricht, läßt sich demnach aussagen: Die Entfernungen der einzelnen Punkte von den Fußpunkten der zugehörigen Inzidenzvertikalen $\left(\text{also } l = p \cdot \frac{s_2}{s_1}\right)$ nehmen von den eben erwähnten Grenzwerten aus in demselben Maße ab, wie p selbst mit dem von seinen Grenzwerten aus abnehmenden φ abnimmt. Minimalwert $= d \cdot \frac{s_2}{s_1}$ für $\varphi = 0$, also bei vertikalnormaler Inzidenz. x_0 ändert sich ebenso proportional q.

Die Werte von x_2 nehmen, während φ von seinen Grenzwerten her abnimmt, ihrerseits zu, aber der Wert von x_2 für $\varphi = 0$ ist keineswegs stets der Maximalwert; für welchen Wert von φ dieser erreicht wird, hängt von den Konstanten des Zylinders und des Augenpunktes ab, die Berechnung ist nur näherungsweise möglich (Gleichung von mindestens 6. Grade). — Die Abweichung der „zweiten“ Bildpunkte vertikal unter den Inzidenzhorizont ist offenbar $x_2 \cdot \sin\omega$; und da sowohl x_2 als ω

für denselben horizontalen Bogen mit abnehmendem φ ihrerseits zunehmen, so nimmt diese Abweichung ebenfalls zu, ist aber wieder durchaus nicht stets am größten für $\varphi = 0$, obgleich da allerdings ω ein Maximum ist. — Das Resultat für die „zweite" Abbildung ist also: Die zu den Inzidenzpunkten eines bestimmten Horizontes gehörigen „zweiten" Bildpunkte bilden eine Kurve, die von den Endpunkten des Ellipsenbogens selbst ausgehend, immer mehr sowohl von diesem Bogen hinter die spiegelnde Fläche als auch unter die betreffende Horizontalebene abweicht, so aber, daß beide Abweichungen ihr Maximum nicht etwa stets innerhalb der „Achsenebene" $ABGH$ erreichen. — Je höher der betreffende Inzidenzbogen liegt, desto mehr weicht die Bildpunktkurve im ganzen hinter den Spiegel zurück (vgl. § 8 u. Fig. II); die hierhergehörigen Grenzfälle behandelt der nächste Paragraph. Die Abweichung der Kurve aber unter den Horizont ist für einen gewissen mittleren — wieder nur näherungsweise zu berechnenden — Inzidenzbogen die größte, da für die Grenzfälle, wie sich zeigen wird, diese Abweichung $= 0$ ist.

Was nun endlich die zu einem bestimmten horizontalen Inzidenzbogen gehörige „erste" Bildpunktkurve anbetrifft, so haben deren einzelne Punkte — gemäß der allgemeinen Diskussion von V in § 6 — dieselbe Entfernung von den Fußpunkten der jeweiligen Inzidenzvertikalen, und zwar auf der zur selben Vertikalen gehörigen Bildstrahlenprojektion, wie die entsprechenden Objektpunkte von eben jenen Fußpunkten vor dem Spiegel. Die „erste" Bildpunktkurve ist also ein etwas zusammengedrängtes Abbild der weiter oben besprochenen Objektpunktkurve, mit der sie ihre beiden Endpunkte — auf den Objektgeraden der streifenden Inzidenz (§ 9) — gemeinsam hat. Die graphische Veranschaulichung dieses Paragraphen geben Fig. V und VI des § 13.

§ 12. Horizontal-normale Inzidenz und Grundinzidenz.

Die horizontal-normale Inzidenz ist die Inzidenz für diejenigen Einfallspunkte, bei denen die Einfallsebene mit dem

Hauptnormalschnitt zusammenfällt, also $\varepsilon = 0^0$ ist. Es sind das die Punkte des Bogens TT_1 der Abschlußebene. Da also alle Augen- und Objektstrahlen in dieser der Objektebene parallelen Ebene verlaufen, so können nur die unendlich fernen Punkte der Objektebene zur Spiegelung gelangen, mithin ist also stets $x_0 = \infty$. — Für diesen besonderen Fall ist, behufs Berechnung von x_1 und x_2, die Elimination von ϑ_2 aus Ic bis IIIc wieder besonders leicht. — Für $\varepsilon = 0$ folgt aus IIIc: $\sin\vartheta_2 = 0$, also hier $\vartheta_2 = 0$, dann aus Ic:

$$\frac{1}{x_2} = \frac{2}{\varrho \cos e} - \frac{1}{x_0},$$

aus IIc:

$$\frac{1}{x_1} = -\frac{1}{x_0};$$

also:

$$x_2 = \frac{x_0 \cdot \varrho \cos e}{2x_0 - \varrho \cos e}, \qquad x_1 = -x_0;$$

oder schließlich, da $x_0 = \infty$ (s. o.),

$$x_2 = \frac{\varrho \cdot \cos e}{2}, \qquad x_1 = \infty \text{ (konstant)}$$

Für die beiden Grenz-Inzidenzpunkte T und T_1, wo $e = \frac{\pi}{2}$ (streifende Inzidenz), ist $x_2 = 0$.

Diese Resultate decken sich wieder mit unseren allgemeinen Formeln (9), (15), bzw. (9a) und (15a), wenn man nur nach Anschauung oder nach (6) ω konstant $= 0$ und ebenso oder nach (7) $\zeta = \pi - e$, und auch $\frac{s_2}{s_1}$ konstant $= \infty$ setzt.

Für punktweise Berechnungen der „zweiten" Bildkurve kämen — bei variierendem φ — die Gleichungen (3), (4), (1), (2) und (5) zur Anwendung, für die Zeichnung sofort die obige Formel $\frac{\varrho \cdot \cos e}{2}$, weil eben ϱ und e unmittelbar geometrisch von Punkt zu Punkt vorliegen.

Neben der „horizontal-normalen“ Inzidenz, dem einen Grenzfall der allgemeinen Inzidenz in gleichem Horizont — nämlich für den höchsten Horizont —, sei hier gleich der andere Grenzfall, die „Grundinzidenz“ — für den tiefsten Horizont — behandelt. Als Einfallspunkte kommen jetzt diejenigen des Bogens UU_1 der Basisellipse in Betracht. Da für alle Punkte $tg\omega = \frac{h}{p}$, bzw. $\frac{s_2}{s_1} = 0$ ist, so ergibt sich sofort nach (9) oder (9a), daß konstant $x_0 = 0$, also auch (nach V) $x_1 = 0$, und nach (15) oder (15a), (auch IV), daß x_2 ebenfalls konstant $= 0$ ist. Es ist das also die Gesamtheit der Punkte, auf die sich die allgemeinen Bemerkungen über aplanatische Spiegelung, soweit es sich um unsere Objektebene handelt, am Schluß des § 4 und des § 6 beziehen (vgl. auch die tiefsten Punkte der vertikal aufsteigenden „zweiten“ Bildkurven § 8).

Hier finde noch eine den § 11 betreffende Ergänzung Platz. Da in den beiden soeben erörterten Grenzfällen der Inzidenz in gleichem Horizont die sich ergebende zweite Bildpunktkurve jedenfalls ganz in dem zugehörigen Horizont liegt, so ist die in jenem Paragraphen (S. 31) aufgestellte Behauptung über die Abweichung der Kurven unter den Horizont bestätigt.

Das Resultat ist folgendes:

1. Zu den Einfallspunkten der „horizontal-normalen“ Inzidenz (Incidenz im „Abschlußhorizont“) gehören als Objektpunkte die unendlich fernen Punkte der von den Fußpunkten der zugehörigen Vertikalen in der § 8 gekennzeichneten Richtung ausgehenden Strahlen der Objektebene; ferner als „zweite“ Bildpunktkurve eine von den Endpunkten des Inzidenzbogens selbst ausgehende Kurve, die ganz in der Abschlußebene verläuft, nach innen aber dermaßen hinter jenen Bogen abweicht, daß die einzelnen Punkte in der Entfernung $\frac{\varrho \cos e}{2}$ hinter dem betreffenden Einfallspunkt in der Verlängerung des Augenstrahles liegen; endlich als „erste“ Bildpunktkurve die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte der hinter den Spiegel verlängerten Augenstrahlen-Projektionen.

2. Die Einfallspunkte der „Grundinzidenz“ entsprechen sich selbst als zugehörigen Objektpunkten, „zweiten“ und „ersten“ Bildpunkten.

Dieser Paragraph findet in graphischer Hinsicht seine Ergänzung in dem nächstfolgenden.

§ 13. Zeichnerische Veranschaulichung der gesamten bisherigen Untersuchung.

Die in den §§ 7 bis 12 gefundenen Resultate finden in den Figuren V und VI eine übersichtliche Veranschaulichung. Fig. V gibt einen Grundriß des gesamten Systems, bezogen auf die Objektebene als Fundamentalebene, und dadurch zugleich eine wirkliche Darstellung der Spiegelungsverhältnisse innerhalb der Objektebene und der Abschlußebene. H ist die Projektion des Augenpunktes A. Die von H ausgehenden, schwach gezeichneten Geraden 0 bis 7 sind die Projektionen je einer zur selben Inzidenzvertikalen gehörigen Schar von Augenstrahlen; speziell die Gerade 0, zugleich die Projektion BG der Horizontalachse AB, gehört zur vertikal-normalen Inzidenz, die Geraden 4 und 7 zur streifenden. Von den Durchschnittspunkten jener 8 Geraden mit der Basisellipse gehen die mit entsprechenden Ziffern versehenen, stark gezeichneten, Objektgeraden aus, so zwar, daß die jedesmal zugehörige Normalenprojektion den Winkel zwischen Augenstrahlenprojektion und Objektgeraden halbiert (s. § 7 und 8). Die Normalenprojektionen haben in der Richtung hinter dem Spiegel die Längen der jeweiligen Krümmungsradien ϱ. Die blau gezeichneten Verlängerungen der Augenstrahlenprojektionen sind nun gemäß § 8 die „ersten“ Abbildungen der mit entsprechenden Ziffern versehenen Objektgeraden; für die streifende Inzidenz fallen (§ 9) Objektgerade und „erste“ Abbildung zusammen. Die Geraden 4 und 7 bilden danach — zusammen mit dem Basisbogen UU_1 — die Grenzen zwischen dem gespiegelten Teil der Objektebene und dem mit „ersten“ Abbildungen erfüllten anderen Teil. — Die „zweiten“ Abbildungen

der Objektgeraden 0 bis 7, die in § 8 diskutierten, innerhalb der vertikalen Bildstrahlenebenen aufsteigenden, Kurven, erscheinen im Grundriß nur als Teile der entsprechenden geradlinigen „ersten“ Abbildungen; diese Projektionsstrecken sind auf der blauen Grundfarbe rot punktiert und haben die Länge $\frac{\varrho \cos e}{2}$ erhalten (s. § 8 und § 12), wobei e die Einfallswinkel innerhalb der Abschlußebene, also die Supplemente der jeweiligen ζ bedeuten. In Figur VI sind nun für die den Ziffern 0, 5, 6, 1, 2, 3 entsprechenden Inzidenzvertikalen die zugehörigen „zweiten“ Bildpunktkurven in ihrer wahren Gestalt innerhalb der jeweiligen vertikalen Bildstrahlenebenen, also gleichsam als ergänzende Aufrißfiguren, punktweise konstruiert. Diese Konstruktion ist nach (15a) bei einer jeden Vertikalen 1. für den Mittelpunkt $\left(\frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{1}\right)$, 2. für denjenigen Punkt, der $\frac{1}{4}$ der Vertikalen von unten her begrenzt $\left(\frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{3}\right)$, ausgeführt. Hierbei ist gemäß der allgemeinen Bemerkung am Schluß des § 7 und der speziellen zu (15a) im § 8 für die absoluten Streckenwerte von x_2 die Proportion benutzt:

$$\frac{x_2}{\underbrace{q \cdot \frac{s_2}{s_1}}_{x_0}} = \frac{\varrho \cos e}{2p \cdot \underbrace{\frac{s_2}{s_1}}_{l} + \varrho \cos e}.$$

Die Konstruktion selbst entspricht der im § 10 für die vertikalnormale Inzidenz genau beschriebenen Art.

Weiterhin geben nun die schwarzen, blauen und roten Kurven der Figur V bezüglich die Objektkurven, die „ersten“ Bildkurven und die Projektionen der „zweiten“ Bildkurven für einige Reihen von Inzidenzpunkten gleichen Horizontes. Die schwarze Kurve I enthält die Objektpunkte, die der Inzidenz in dem Horizont „$\frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{3}$“ entsprechen; diese haben nach (10a) von den Fußpunkten der zugehörigen Inzidenzvertikalen jedesmal

die Entfernung $l = p \cdot \frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{3} p$. Für die schwarze Kurve II ist ebenso $\frac{s_2}{s_1} = \frac{1}{1}$, also jedesmal $l = p \cdot \frac{s_2}{s_1} = p$. Als eine dritte schwarze Kurve, die der horizontal-normalen Inzidenz (im Abschlußbogen TT_1) entspräche, käme diejenige der unendlich fernen Objektpunkte in Betracht, durch „$\rightarrow \infty$“ auf den Objektgeraden 0 bis 7 angedeutet, und endlich als vierte der Basisbogen UU_1, der der „Grundinzidenz“, d. h. der Inzidenz in den Punkten von UU_1 selbst entspräche. — Analog haben die einzelnen Punkte der blaugezeichneten „ersten“ Bildkurven, gemäß der allgemeinen Gleichung V, von den Fußpunkten der zugehörigen Inzidenzvertikalen jedesmal die Entfernung: Für Bildkurve I: $\frac{p}{3}$ —, für Bildkurve II: p —, für die Bildkurve der horizontal-normalen Inzidenz: ∞ —, für die Bildkurve der Grundinzidenz: 0; um letzteres zu kennzeichnen, müßte man sich den Bogen UU_1 blau nachgezeichnet denken. Die Schnitte der „ersten“ Bildkurven I und II mit den „ersten“ Bildgeraden 0 bis 6 sind in den Aufrißzeichnungen der Figur VI durch entsprechende römische Ziffern (blau) gekennzeichnet. — Endlich von den rotgezeichneten Kurven der Figur V gibt nur die am weitesten vom Ellipsenbogen UU_1 (bzw. TT_1) abweichende die wahre Gestalt einer „zweiten“ Bildkurve, es ist die zu den unendlich fernen Objektpunkten gehörige, deren einzelne Punkte innerhalb des zugehörigen Abschlußhorizontes in der jedesmaligen Entfernung $\frac{\varrho \cdot cos e}{2}$ von den betreffenden Einfallspunkten liegen. — Die anderen beiden roten Kurven, I und II, sind nur die Projektionen der entsprechenden wirklichen „zweiten“ Bildkurven; denn diese selbst weichen ja (s. § 11) von ihren Endpunkten aus mehr oder minder von der betreffenden Horizontebene nach unten ab. Demgemäß sind die in der Figur sichtbaren Entfernungen der einzelnen Punkte von den jeweiligen Projektionen der Einfallspunkte nicht gleich dem betreffenden x_2, sondern nur gleich der Horizontalprojektion von x_2, nämlich $x_2 \cdot cos \omega$; diese Strecke ist

jedesmal aus der Figur VI entnommen, dieselbe Figur VI liefert dann in den rot gezeichneten kleinen Vertikalen, die die jedesmalige Abweichung $x_2 \cdot sin\omega$ unter den Horizont angeben, die erwünschte Ergänzung. Zur Grundinzidenz — im Bogen UU_1 — würde, nach § 12, wieder der Bogen UU_1 selbst als „zweite“ Bildkurve gehören, und demgemäß wäre UU_1 auch noch rot nachzuzeichnen.

§ 14. Veränderungen in der Lage des Augenpunktes. Spezielle Augenpunkte.

Zwei Richtungen sind es wesentlich, welche für eine Veränderung der Augenpunktslage in Betracht zu ziehen sind: Der Augenpunkt kann 1. seine Entfernung von der Objektebene und 2. diejenige vom Spiegel verändern. — Rückt der Augenpunkt auf derselben Vertikalen immer mehr von der Objektebene fort, so ändert das an den „ersten“ Abbildungen nichts; dagegen werden die Vertikalkurven, die die „zweiten“ Abbildungen der Objektgeraden des § 8 darstellen, immer höher bzw. länger, es werden also die „zweiten“ Abbildungen von Objektfiguren, insoweit sie in die Richtungen jener Objektgeraden fallen, immer mehr auseinandergezerrt, und, insoweit sie in die Richtungen der den Inzidenzpunkten gleichen Horizontes entsprechenden Kurven fallen, vergleichsweise immer mehr zusammengedrängt erscheinen; übrigens ist niemals jene Auseinanderzerrung in der ganzen Ausdehnung der Vertikalkurve gleichmäßig, sondern nimmt nach oben hin ab, wie schon daraus hervorgeht, daß stets der Teil der Objektebene von UU_1 bis zur Kurve II (s. Fig. V und § 13) in der unteren Hälfte des Zylinders zur Spiegelung gelangt und der unendliche übrige Teil in der anderen Hälfte. Weiterhin hat das fortgesetzte Abrücken des Augenpunktes von der Objektebene zur Folge, daß die Abweichungen der horizontalen Bildkurven unter den jeweiligen Horizont immer bedeutender werden (s. § 11).

Rückt der Augenpunkt auf derselben Vertikalen immer mehr an die Objektebene heran, so gilt für die dadurch bedingten

Änderungen in den „zweiten“ Abbildungen das genau Umgekehrte von dem soeben Ausgeführten, vor allem hinsichtlich der Vertikalkurven, die nun immer niedriger werden. Die äußerste Grenze nach dieser Richtung hin bildet der Spezialfall, daß der Augenpunkt in der Objektebene liegt. Hier erscheinen die „zweiten“ Abbildungen der Objektgeraden gar nicht mehr als aufsteigende Kurven, sondern nur als Stücke der „ersten“ Abbildungsgeraden, so wie sie in Fig. V rot punktiert auf der blauen Grundfarbe gezeichnet sind, (der Augenpunkt liegt jetzt in H selbst). — In der Rechnung ist ω konstant $= 0$ und $h = 0$ zu setzen. Von den Resultaten der allgemeinen Untersuchung ist direkt nur $x_2 = \frac{\varrho \cdot cos e}{2}$ für $x_0 = \infty$ zu übernehmen, weil für $x_0 = \infty$ auch früher $\omega = 0$ war (§ 12); die innerste rote Kurve in Fig. V behält also ihre frühere Bedeutung. — Für die übrigen Punkte der Objektebene sind, bei nur noch variierendem φ, die Gleichungen (3), (4), (1), (2), (5) und (8) wie sonst zu benutzen, dagegen würden (9), (10), (15), bzw. (9a), (10a), (15a) für $\omega = 0$ und $h = 0$ charakteristischerweise durchaus unbestimmte Werte $(\frac{0}{0})$ liefern. Es kommen eben jetzt für eine bestimmte, allein durch φ gegebene, Blickrichtung die sämtlichen Punkte der betreffenden Objektgeraden, d. h. beliebige Werte von x_0 (jedesmal identisch mit l) in Betracht, und für x_2 ist nur seine direkte Beziehung zu x_0 (s. den eingeklammerten Ausdruck neben (15a)) zu verwerten, die für $\omega = 0$ ergibt:

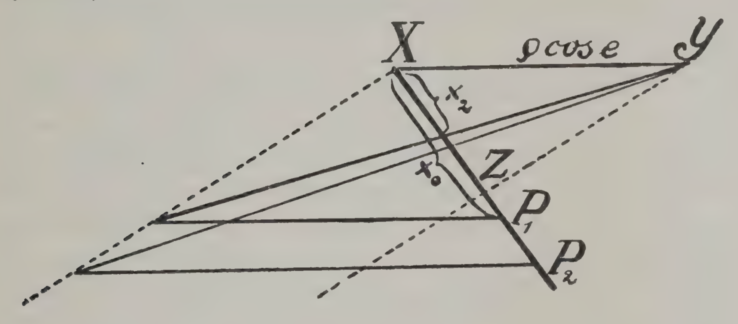
$$x_2 = -\frac{x_0 \cdot \varrho \cos\zeta}{2x_0 + \varrho \cos\zeta}.$$

Die Form dieser Gleichung:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{\varrho cos e}{2x_0 + \varrho cos e}$$

(s. die Bemerkungen über Vorzeichen in den §§ 7 u. 8) liefert auch ohne weiteres die geometrische Konstruktion der „zweiten“ Bildabszissen beliebiger Punkte einer Objektgeraden. Hier ist — als Beispiel — für die Objektgerade „2“ der Fig. V

das zugehörige $\varrho \cos e = XY$ hingelegt; auf der von X beliebig ausgehenden, stark gezeichneten, Geraden sind $XZ = \frac{\varrho \cos e}{2}$ und XP_1, XP_2, usw. als verschiedene Werte von x_0 abgetragen. Die Parallele durch X zu YZ bestimmt auf den durch P_1, P_2 usw. zu XY gezogenen Parallelen Durchschnittspunkte, deren Verbindungslinien mit Y dann die jeweilig zugehörigen Werte von x_2 auf XZ begrenzen (bis zum Maximalwerte $x_2 = \frac{\varrho \cos e}{2}$ für $x_0 = \infty$).



Die zweite Art der Veränderung in der Lage des Augenpunktes betrifft seine Entfernung vom Spiegel. — Rückt der Augenpunkt in der Richtung einer Normalen — etwa BA in unseren Figuren — vom Spiegel fort, so wird das spiegelnde Flächenstück immer breiter — allerdings wird der gespiegelte Teil der Objektebene auch immer größer —, und das Intervall für φ immer geringer, bis für den unendlich fernen Augenpunkt φ konstant $= 0$ wird; die für diesen Fall zu den Grenzpunkten gehörigen ψ ergeben sich aus (3b):

$$-\frac{b}{a} ctg\,\psi = tg\,\chi \left(= \frac{a}{b} tg\,\tau \right),$$

woraus, in Übereinstimmung mit der Anschauung, für die mit $+\chi$ zu berechnende Seite ein stumpfer, für die andere Seite ein spitzer Winkel für ψ folgt (s. die Bemerkungen zu (4) in § 7 und zu (4b) in § 9). Die „zweiten" Abbildungen von

Objektfiguren werden, insoweit sie in die Richtungen der bewußten Objektgeraden fallen, mit vom Spiegel fortrückendem Augenpunkte immer mehr zusammengedrängt erscheinen, was schon daraus zu erkennen ist, daß der in der unteren Hälfte zur Spiegelung gelangende Teil der Objektebene (bis Kurve II, Fig. V) jetzt immer größer wird. — Auch für ω wird das Intervall immer geringer, bis für den unendlich fernen Augenpunkt ω konstant $= 0$ wird (für Maximalwert: $tg\,\omega = \frac{h}{p}$, hier $= \frac{h}{\infty} = 0$); werden also die Abweichungen der Horizontalkurven unter den Horizont immer geringer, so verschwinden sie für den unendlich fernen Augenpunkt gänzlich. — Für diesen Grenzfall müßten übrigens alle im Endlichen liegenden Objektpunkte mittels „Grundinzidenz" (Bogen UU_1) zur Spiegelung gelangen, weil nur so der zwischen Objektstrahl und seiner Projektion stets wiederkehrende Winkel ω konstant $= 0$ sein könnte. Dieser Grenzfall wäre also, insoweit es sich um endliche Objektpunkte handelt, eine Spezialisierung des vorher besprochenen Grenzfalles, daß der Augenpunkt in der Objektebene liegt (diesmal eben im Unendlichen). Erst für unendlich ferne Objektpunkte würden auch höhere Teile der Spiegelfläche an der Inzidenz beteiligt sein, und da dann alle parallelen Bögen für einander eintreten könnten (ω jedenfalls $= 0$), so würde jetzt eine gewisse Vielheit bzw. Unklarheit in den Abbildungen bedingt sein. — Die Veränderung endlich, die der vom Spiegel fortrückende Augenpunkt in den „ersten" Abbildungen bedingt, ist dadurch gekennzeichnet, daß der für diese Abbildungen verbleibende Raum immer schmaler wird, mithin die den Inzidenzpunkten gleichen Horizontes entsprechenden Kurven immer mehr zusammengedrängt werden (vgl. hiermit die analoge Veränderung der Vertikalkurven der „zweiten" Abbildungen).

Rückt der Augenpunkt immer näher an den Zylinder heran, so ereignet sich in allen Stücken das genau Umgekehrte von dem für die entgegengesetzte Bewegung soeben Ausgeführten. Das Intervall für φ und für ω wächst nun dermaßen, daß für

den Grenzfall, wo der Augenpunkt in der spiegelnden Fläche liegt, der Maximalwert für φ beiderseitig $= \frac{\pi}{2}$ und der für ω ebenfalls $= \frac{\pi}{2}$ wird $\left(tg\,\omega = \frac{h}{p} = \frac{h}{0} = \infty\right)$. Das spiegelnde Flächenstück schrumpft zu einer einzigen Inzidenzvertikalen (Vertikalachse $B\,G$) zusammen; die der streifenden Inzidenz entsprechende Objektgerade (jetzt nur eine) ist die im Fußpunkte (G) berührende Tangente, die beiden von ihr begrenzten unendlich großen Teile der Objektebene, deren einer zur Spiegelung gelangt, sind diesmal gleich. Der einzig mögliche Inzidenzpunkt ist, solange nicht ω gerade $= \frac{\pi}{2}$ ist, der Augenpunkt selbst; denn nur dort einfallende Strahlen, aber auch alle, werden, in welcher Richtung sie immer reflektiert werden, den Augenpunkt, der eben an derselben Stelle liegt, treffen. Objektstrahlen, die in anderen Punkten der einzigen Inzidenzvertikalen auffielen, könnten nach der Reflexion nur dann den Augenpunkt treffen, wenn sie ganz in jener Vertikalen verliefen (die Augenpunktslage bedingt dies zunächst für den Augen- und damit dann auch für den Objektstrahl); das träfe für $\omega = \frac{\pi}{2}$ ein und könnte nur den Objektpunkt G betreffen. Bei der Rechnung ist nun jedenfalls stets $p = 0$, φ variiert beiderseits von 0 bis $\frac{\pi}{2}$; ψ ist konstant $= \tau$, daher $\sigma = \chi$; natürlich auch ϱ konstant (sein Wert folgt aus (5)); ferner nun nach (2) $\zeta = \pi - \varphi$, φ also identisch mit dem „e“ der Abschlußebene. Solange nun $0 \leqq \omega < \frac{\pi}{2}$ ist, ist auch $q = 0$, $s_1 = 0$, $s_2 = h$; die auf der Verschiedenheit der Inzidenzstellen derselben Vertikalen begründeten Ausdrücke (9a), (10a) und (15a) würden charakteristischerweise x_0, l und x_2 unbestimmt lassen $\left(\frac{0}{0}\right)$, weil eben diese Unterscheidungsart der Punkte einer Objektgeraden bei nur einem Inzidenzpunkt unmöglich ist, x_0 und l sind entweder aus (9) und (10),

bei variierendem ω, zu bestimmen, oder aber eins von ihnen beliebig zu wählen und danach dann ω aus (9) oder (10) zu berechnen; x_2 endlich ergibt sich aus (15) oder dem neben (15a) eingeklammerten Ausdruck, die entsprechende Rechnung oder Konstruktion weist nirgends etwas Besonderes gegenüber den allgemeinen früheren Erörterungen auf. Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ kommt, wie schon erwähnt, nur der Grundpunkt G als Objektpunkt in Frage. Die ebenfalls schon angedeutete Unbestimmtheit der Inzidenzstelle für diesen Fall geht aus den allgemeinen Formeln hervor, indem zwar p wieder $= 0$, aber sowohl $q = \frac{p}{\cos\omega}$ [(13)], wie x_0, jetzt auch nach (9), durchaus unbestimmt bleiben. l wird natürlich, auch nach (10), $= 0$, ferner $x_2 = - x_0$ (das zugleich $= x_1$ ist). Es ist das also der Fall, der im § 4 — zweite Deutung von Nr. 2 — bereits behandelt ist (S. 10). — Das Gesamtresultat ist also jedenfalls, daß das räumliche Strahlenbüschel, welches die gesamten Bildstrahlen bei jeder Lage des Augenpunktes mit letzterem als Scheitel bilden, in unserem Falle seinen Scheitel in dem einheitlichen Inzidenzpunkt der spiegelnden Fläche selbst hat, der eben mit dem Augenpunkt identisch ist. — Die „ersten“ Abbildungen liefern, diesmal in völliger Übereinstimmung mit dem ebenen Spiegel, ein genau symmetrisch gleiches Abbild des gespiegelten Teiles der Objektebene; es kommt hier eben nur ein ebener Ersatzspiegel in Betracht (s. das Allgemeine zu V in § 6). — Es sei noch hinzugefügt, daß, wenn der Augenpunkt zugleich in der Objektebene und in der spiegelnden Fläche liegt, das oben erwähnte Strahlenbüschel der Bildabszissen ein „ebenes“ wird (ω konstant $= 0$).

Endlich seien ganz kurz noch zwei spezielle Lagen des Augenpunktes erörtert, die sich ebenfalls als die Grenzfälle einer systematischen Lagenveränderung ergeben. Wandert der Augenpunkt um den Spiegel herum, so kommt er hierbei je zweimal in die verlängerte große bzw. kleine Achse der Ellipse. Je mehr er sich nun diesen Grenzlagen nähert, desto mehr nähern sich die Spiegelungsverhältnisse auf beiden Seiten der „Spiegel-

achsenebene“ $(ABGH)$ völliger Symmetrie, und diese wird nun in den erwähnten Grenzlagen selbst erzielt. Dies geht nicht nur aus der geometrischen Anschauung hervor, sondern auch aus der Berechnung der ψ-Werte für beiderseitig gleiches φ, sowie aus der Berechnung der beiderseitigen Grenzwerte für φ. — Liegt der Augenpunkt (A) in der verlängerten großen Ellipsenachse, so wird $v = 0$, $\chi = 0$ (weil $\tau = 0$), also in (3) $\lambda = tg(-\varphi)$ für bestimmte Werte von φ in beiden Rechnungen gleich, mithin folgt nach (4) aus

$$\cos\psi = \frac{au\lambda^2 \pm b\sqrt{-u^2\lambda^2 + a^2\lambda^2 + b^2}}{a^2\lambda^2 + b^2}$$

in konsequenter Durchführung der allgemeinen Festsetzungen (S. 19) beiderseitig das gleiche, spitzwinklige und positive ψ. — Liegt nun A in der verlängerten kleinen Ellipsenachse, so wird $u = 0$, $\chi = \frac{\pi}{2}$, also in (3) für die eine Rechnung

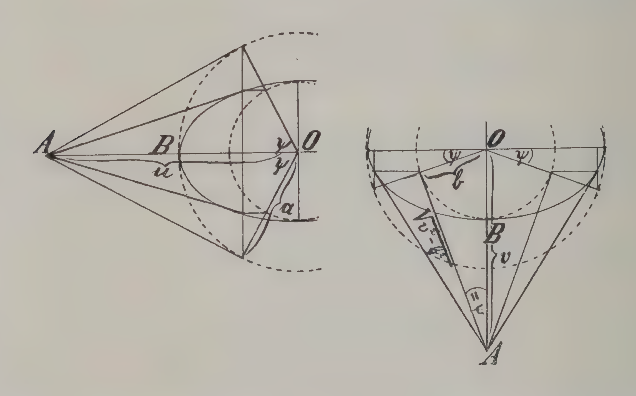
$$\lambda = tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

für die andere $\lambda = tg\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$, was also wieder für bestimmtes φ beiderseitig den gleichen Wert $\lambda = ctg\,\varphi$ bedingt. Da nun ferner v in den Rechnungen auf beiden Seiten entgegengesetztes Vorzeichen bekommt, so werden im Resultat:

$$\cos\psi = \frac{-a\lambda v \pm \sqrt{-v^2 + a^2\lambda^2 + b^2}}{a^2\lambda^2 + b^2}$$

die ersten Glieder des Zählers in den beiden Rechnungen entgegengesetztes Vorzeichen haben. Die konsequente Anwendung der allgemeinen Festsetzungen (S. 19) läßt nun neben negativem Werte von $-a\lambda v$ auch ein negatives Vorzeichen vor der Wurzel erscheinen, und umgekehrt, so daß die beiderseitigen Werte von $\cos\psi$ (bei gleichem φ) sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Heiße der absolute Wert des einen Winkelwertes ψ_1, so ist der andere (stumpfe) $= \pi - \psi_1$, was in der Tat voll-

ständige Symmetrie, diesmal in bezug auf die kleine Achse, bedeutet. Die beiderseitigen Grenzwerte von φ anlangend, so wird für $v=0$ nach (4b) beiderseitig $\cos\psi=\frac{a}{u}$, und für $u=0$ beiderseitig $\cos\psi=\pm\frac{\sqrt{v^2-b^2}}{v}$, woraus dann nach (1) und (2b) die die Symmetrie bedingenden Werte für φ hervorgehen. Die letzten beiden Resultate entsprechen — wie zu erwarten — den

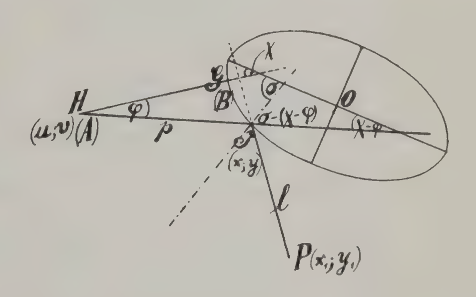


bekannten Zusammenhängen, die für die Tangenten an Ellipsenpunkten einerseits und an solchen Scheitelkreispunkten andrerseits bestehen, die entweder die gleiche Abszisse (großer Scheitelkreis) oder die gleiche Ordinate (kleiner Scheitelkreis) wie die betreffenden Ellipsenpunkte haben. In nebenstehenden Figuren sind diese Zusammenhänge ohne weiteres zu erkennen.

§ 15. Direkte Lösung unseres Problems.

Aus rechnungstechnischen Gründen ist unsere Untersuchung so angelegt, daß wir (s. § 5), bei vorgeschriebenem Augenpunkt, für gegebene Blickrichtungen, d. h. für gegebene Inzidenzpunkte die zugehörigen Objekt- und Bildpunkte rechnerisch bzw. geometrisch bestimmten. Die gewonnenen Resultate weisen uns nun aber auch den Weg, auf dem die direkte Lösung

unseres Problems anzustreben ist. Diese würde darauf ausgehen müssen, zu gegebenen Objektpunkten die zugehörigen Bildpunkte — bei vorgeschriebenem festem Augenpunkte — zu bestimmen. Es kommt nun — das ist der Kern der Lösung — darauf an, zu einem gegebenen Objektpunkt den zugehörigen Inzidenzpunkt zu finden, und hierzu ist es wieder notwendig, zunächst die zugehörige Inzidenzvertikale ausfindig zu machen. Deren Fußpunkt J ist nun aber so zu bestimmen — s. § 7 S. 20 und 21, sowie § 8 —, daß seine Verbindungsgeraden mit der Projektion des Augenpunktes (H) und mit dem gegebenen Objektpunkt P einen Winkel bilden, der von der zugehörigen



Normalen halbiert wird (halber Winkel: $\pi - \zeta$). Unsere Aufgabe ist es also, den Punkt J in solchem Sinne zu berechnen (bzw. zu konstruieren). Die Koordinaten der Augenpunktsprojektion H seien, bezogen auf die Achsen der Grundellipse als Koordinatenachsen, u und v, diejenigen des Objektpunktes $P: x_1 y_1$, diejenigen des gesuchten Ellipsenpunktes $J: x, y$, die exzentrische Anomalie des letzteren ψ. Die Normale von J bilde mit der positiven Richtung der großen Ellipsenachse den Winkel σ, in derselben Weise bilde HG, die Projektion der „Horizontalachse" des Spiegels AB, den Winkel χ. HJ (Länge „p") bilde mit HG den Winkel φ und folglich mit der großen Ellipsenachse den Winkel $\chi - \varphi$ und mit der Normalen von J (nach innen) den Winkel $\sigma - (\chi - \varphi)$; endlich bildet dann PJ (Länge „l") mit der großen Ellipsenachse den Winkel $2\sigma - (\chi - \varphi)$. — Schreiben wir der Kürze wegen ϑ statt $\chi - \varphi$, dann gilt nun:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = tg(2\sigma - \vartheta) \\ &\frac{v - y}{u - x} = tg\,\vartheta \\ &tg\,\sigma = \frac{a}{b}\,tg\,\psi \text{ (s. Gl. (1))} \\ &x = a\cos\psi \\ &y = b\sin\psi \end{aligned}\right\}$$

Hieraus sind σ, ϑ und dann auch x und y zu eliminieren, so ergibt sich die gewünschte Gleichung für ψ.

Es ist nun

$$tg(2\sigma - \vartheta) = \frac{tg\,2\sigma - tg\,\vartheta}{1 + tg\,2\sigma \cdot tg\,\vartheta},$$

ferner

$$tg\,2\sigma = \frac{2\,tg\,\sigma}{1 - tg^2\sigma} = \frac{2\,ab\,tg\,\psi}{b^2 - a^2 tg^2\psi};$$

setzt man hier vorläufig wieder x und y ein, so erhält man:

$$tg\,2\sigma = \frac{2a^3b^3 \sin\psi\cos\psi}{a^2b^4\cos^2\psi - a^4b^2\sin^2\psi} = \frac{2a^2b^2x \cdot y}{b^4x^2 - a^4y^2}.$$

Mithin ergibt sich unter Benutzung von $tg\,\vartheta = \frac{v - y}{u - x}$:

$$tg(2\sigma - \vartheta) = \underbrace{\frac{\frac{2a^2b^2x \cdot y}{b^4x^2 - a^4y^2} - \frac{v - y}{u - x}}{1 + \frac{2a^2b^2xy}{b^4x^2 - a^4y^2} \cdot \frac{v - y}{u - x}} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}}.$$

Also:

$$\frac{2a^2b^2xy}{b^4x^2 - a^4y^2} - \frac{v - y}{u - x} - \frac{y_1 - y}{x_1 - x} - \frac{2a^2b^2x \cdot y}{b^4x^2 - a^4y^2} \cdot \frac{(v - y)\cdot(y_1 - y)}{(u - x)\cdot(x_1 - x)} = 0.$$

$$2a^2b^2ux_1xy - 2a^2b^2x_1x^2y - 2a^2b^2ux^2y + 2a^2b^2x^3y$$
$$- b^4vx_1x^2 + b^4x_1x^2y + b^4vx^3 - b^4x^3y + a^4vx_1y^2 - a^4x_1y^3$$

$$- a^4 v x y^2 + a^4 x y^3 - b^4 u y_1 x^2 + b^4 y_1 x^3 + b^4 u x^2 y - b^4 x^3 y$$
$$+ a^4 u y_1 y^2 - a^4 y_1 x y^2 - a^4 u y^3 + a^4 x y^3 - 2 a^2 b^2 v y_1 x y$$
$$+ 2 a^2 b^2 y_1 x y^2 + 2 a^2 b^2 v x y^2 - 2 a^2 b^2 x y^3 = 0.$$

Geordnet:

$$b^4 \overbrace{(v + y_1)}^{7,\,14} x^3 + 2 b^2 \overbrace{(a^2 - b^2)}^{4,\,8,\,16} x^3 y - b^4 \overbrace{(v x_1 + u y_1)}^{5,\,13} x^2$$
$$- b^2 \overbrace{(x_1 + u)(2a^2 - b^2)}^{2,\,3,\,6,\,15} x^2 y + 2 a^2 b^2 \overbrace{(u x_1 - v y_1)}^{1,\,21} \cdot x y$$
$$+ a^2 \overbrace{(v + y_1)(2b^2 - a^2)}^{11,\,18,\,22,\,23} x y^2 + 2 a^2 \overbrace{(a^2 - b^2)}^{12,\,20,\,24} x y^3$$
$$+ a^4 \overbrace{(v x_1 + u y_1)}^{9,\,17} y^2 - a^4 \overbrace{(x_1 + u)}^{10,\,19} y^3 = 0;$$

setzt man hier nun $x = a \cos\psi$ und $y = b \sin\psi$, so erhält man:

$$a^3 b^4 (v + y_1) \cos^3\psi + \underline{2 a^3 b^3 (a^2 - b^2) \cos^3\psi \sin\psi}$$
$$- a^2 b^4 (v x_1 + u y_1) \cos^2\psi - a^2 b^3 (x_1 + u)(2 a^2 - b^2) \cos^2\psi \sin\psi$$
$$+ \underline{2 a^3 b^3 (u x_1 - v y_1) \cos\psi \sin\psi} + a^3 b^2 (v + y_1)(2 b^2 - a^2) \cos\psi \sin^2\psi$$
$$+ \underline{2 a^3 b^3 (a^2 - b^2) \cos\psi \sin^3\psi} + a^4 b^2 (v x_1 + u y_1) \sin^2\psi$$
$$- a^4 b^3 (x_1 + u) \sin^3\psi = 0.$$

Zieht man die drei unterstrichenen Glieder in eins zusammen (es wird jetzt das vierte), so ergibt sich:

$$a b^2 (v + y_1) \cos^3\psi - b^2 (v x_1 + u y_1) \cos^2\psi$$
$$- b (x_1 + u)(2 a^2 - b^2) \cos^2\psi \sin\psi$$
$$+ 2 a b (a^2 - b^2 + u x_1 - v y_1) . \cos\psi \sin\psi$$
$$+ a (v + y_1)(2 b^2 - a^2) \cos\psi \sin^2\psi + a^2 (v x_1 + u y_1) \sin^2\psi$$
$$- a^2 b (x_1 + u) \sin^3\psi = 0.$$

Dieser Gleichung könnte man schönere und übersichtlichere Formen geben, die aber zu einer bequemeren Lösung nicht

führen; um den schließlichen Grad der zu lösenden Gleichung zu erkennen, setzen wir in den ersten drei Gliedern

$$cos^2 \psi = 1 - sin^2 \psi$$

und vereinigen die entsprechenden Bestandteile der Glieder 1 und 5, 2 und 6, 3 und 7; so verbleibt $cos \psi$ nur noch in der ersten Potenz. Es ergibt sich:

$$a b^2 (v + y_1) cos \psi - a(v + y_1)(a^2 - b^2) cos \psi sin^2 \psi$$
$$- b^2 (v x_1 + u y_1) + (v x_1 + u y_1)(a^2 + b^2) sin^2 \psi$$
$$- b(x_1 + u)(2a^2 - b^2) sin \psi + b(x_1 + u)(a^2 - b^2) sin^3 \psi$$
$$+ 2ab(a^2 - b^2 + u x_1 - v y_1) cos \psi sin \psi = 0.$$

Nun schreibe man die Glieder mit $cos \psi$ auf eine Seite:

$$a cos \psi [-(v + y_1)(a^2 - b^2) sin^2 \psi$$
$$+ 2b(u x_1 - v y_1 + a^2 - b^2) sin \psi + b^2 (v + y_1)]$$
$$= - b(x_1 + u)(a^2 - b^2) sin^3 \psi - (v x_1 + u y_1)(a^2 + b^2) sin^2 \psi$$
$$+ b(x_1 + u)(2a^2 - b^2) sin \psi + b^2 (v x_1 + u y_1).$$

Setzt man hier $cos \psi = \sqrt{1 - sin^2 \psi}$, so wird die Gleichung, nach dem Quadrieren, vom 6. Grade für $sin \psi$, ist also nur nach Annäherungsmethoden zu lösen. — Hätten wir es mit einem Kreiszylinder zu tun, dann würde die Gleichung nur vom vierten Grade, mithin ohne weiteres lösbar: Es wäre $a = b = r$ zu setzen, und man erhielte:

$$r cos \psi [2r(u x_1 - v y_1) sin \psi + r^2 (v + y_1)]$$
$$= - 2r^2 (v x_1 + u y_1) sin^2 \psi + r^3 (x_1 + u) sin \psi + r^2 (v x_1 + u y_1);$$

oder:

$$cos \psi [2(u x_1 - v y_1) sin \psi + r(v + y_1)]$$
$$= - 2(v x_1 + u y_1) sin^2 \psi + r(x_1 + u) sin \psi + (v x_1 + u y_1).$$

Setzt man hier wieder $cos \psi = \sqrt{1 - sin^2 \psi}$, so wird die quadrierte Gleichung in der Tat vom vierten Grade. Man kann

übrigens dieser Gleichung, die man für den Kreiszylinder direkt auf kürzestem Wege findet, die formell schönere Fassung geben:

$$(ux_1 - vy_1) sin 2\psi + r[(v + y_1) cos \psi - (x_1 + u) sin \psi] - (vx_1 + uy_1) cos 2\psi = 0.$$

Angenommen, es wäre nun ψ aus obiger Gleichung annähernd berechnet, so wäre damit der Fußpunkt J der in Betracht kommenden Inzidenzvertikalen gefunden, zugleich auch $HJ = p$ und $PJ = l$. — Um nun den Inzidenzpunkt zu finden, ist ω bzw. s_1 und s_2 zu bestimmen. Hierzu benutzt man (s. § 7, S. 21 und Fig. II) die Tatsache, daß ω sowohl zwischen Objektstrahl (x_0) und seiner Projektion (l), als auch zwischen Augenstrahl (q) und seiner Projektion (p) (auf die Abschlußebene) erscheinen muß, oder, wie man auch sagen kann, daß die Dreiecke PJE und ACE ähnlich sind und ω bei P bzw. A enthalten. Es folgt sofort:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{p}{l} \text{ und } s_1 + s_2 = h;$$

hieraus:

$$s_1 - s_2 = h \cdot \frac{p - l}{p + l};$$

mithin

$$s_1 - \frac{p \cdot h}{p + l} \text{ und } s_2 = \frac{l \cdot h}{p + l},$$

ferner:

$$tg\,\omega = \frac{s_1}{p} = \frac{h}{p + l}, \text{ und } x_0 = \sqrt{s_2^2 + l^2} = \frac{l}{cos\,\omega}.$$

Endlich ergeben sich jetzt leicht: aus (1) σ, aus der auf (3) folgenden Gleichung λ und hieraus dann nach (3) φ, aus (2) ζ und aus (5) ϱ.

Mithin sind alle Daten zur beliebigen Anwendung der früher erörterten Methoden vorhanden.

Der Schwierigkeit in der Lösung der obigen Gleichung sechsten Grades entspricht bei der rein graphischen Behandlung unseres jetzigen Problems die Schwierigkeit, den Punkt J der Forderung

gemäß bei geometrisch gegebenem P geometrisch zu finden. Auch dies ist nur annäherungsweise möglich. Ist aber J bekannt, dann sind zunächst p und l geometrisch bestimmt, als Verbindungsstrecken gegebener Punkte; und dann mit Benutzung der obigen Proportionen auch die anderen für die graphische Lösung notwendigen Strecken.

Das angegebene Verfahren zur direkten Lösung unseres Problems ist für beliebige Punkte der Objektebene anzuwenden. Es ist natürlich auch auf zusammenhängende Punktreihen, bzw. Punkthaufen anzuwenden, und damit wäre dann unser Problem auch für — punktmäßig gegebene — beliebige Kurven, Figuren und Flächenstücke mit dem durch unsere Annäherungsmethoden bedingten Grade von Genauigkeit als gelöst zu betrachten.*)

Herrn Professor Dr. Matthiessen-Rostock, der durch Nennung des Themas die erste Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben hat, sage ich hier meinen aufrichtigen Dank.

*) Um die Schwierigkeit des ersten Teiles unserer Lösung zu vermeiden, könnte man zu einer großen Anzahl von Inzidenzvertikalen die zugehörigen Objektgeraden analytisch, bzw. geometrisch (wie Fig. V) von vornherein festlegen und würde nun die Schnittpunkte abzubildender Linien mit jenen Objektgeraden nach dem zweiten Teile (S. 49 Bestimmung von ω, s_1, s_2 usw.) weiter behandeln. Diese Methode ist nur für gegebene Linien (Kurven usw.), nicht für vorgeschriebene Punkte anzuwenden.

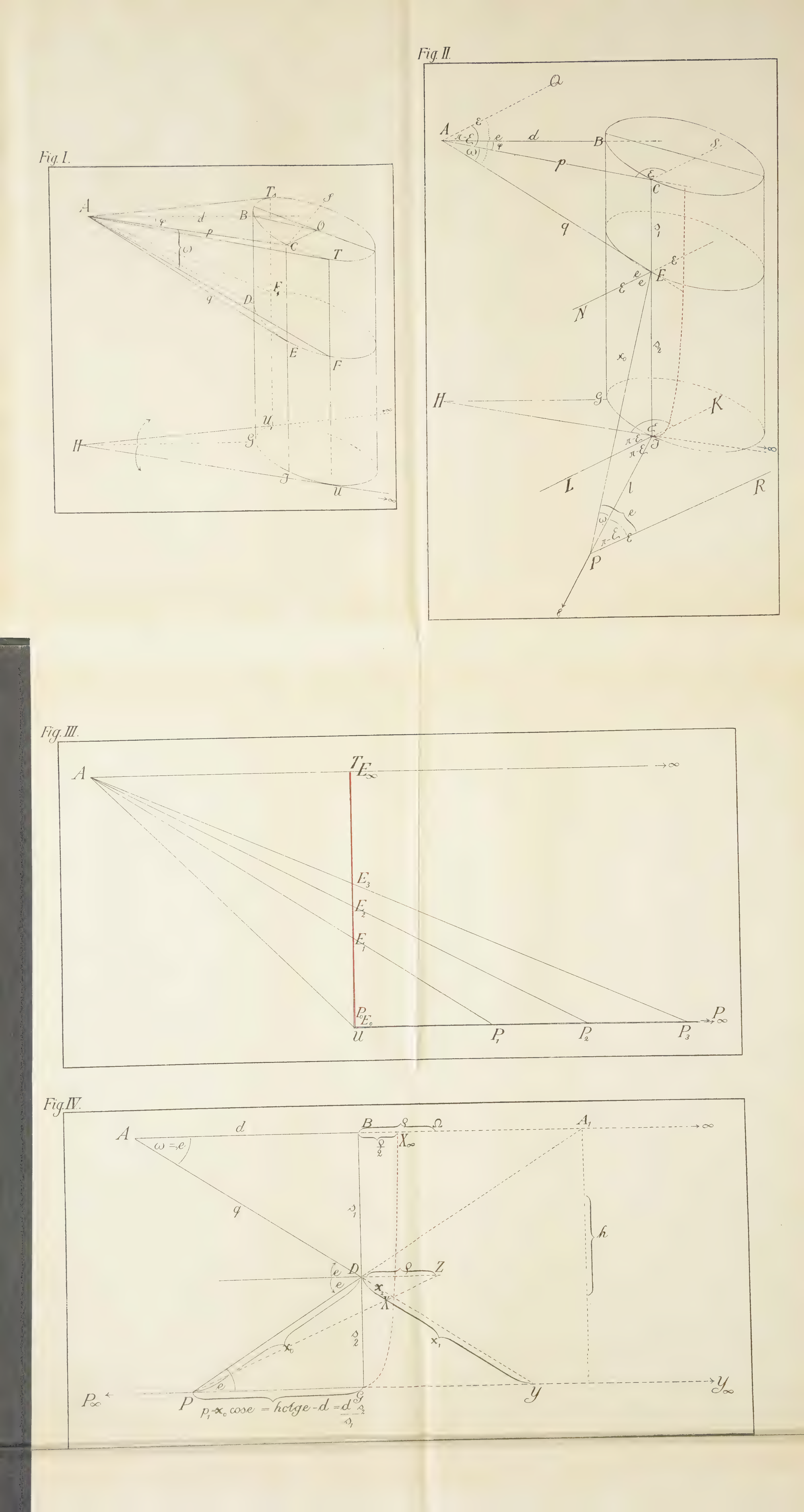


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.

Fig. V.

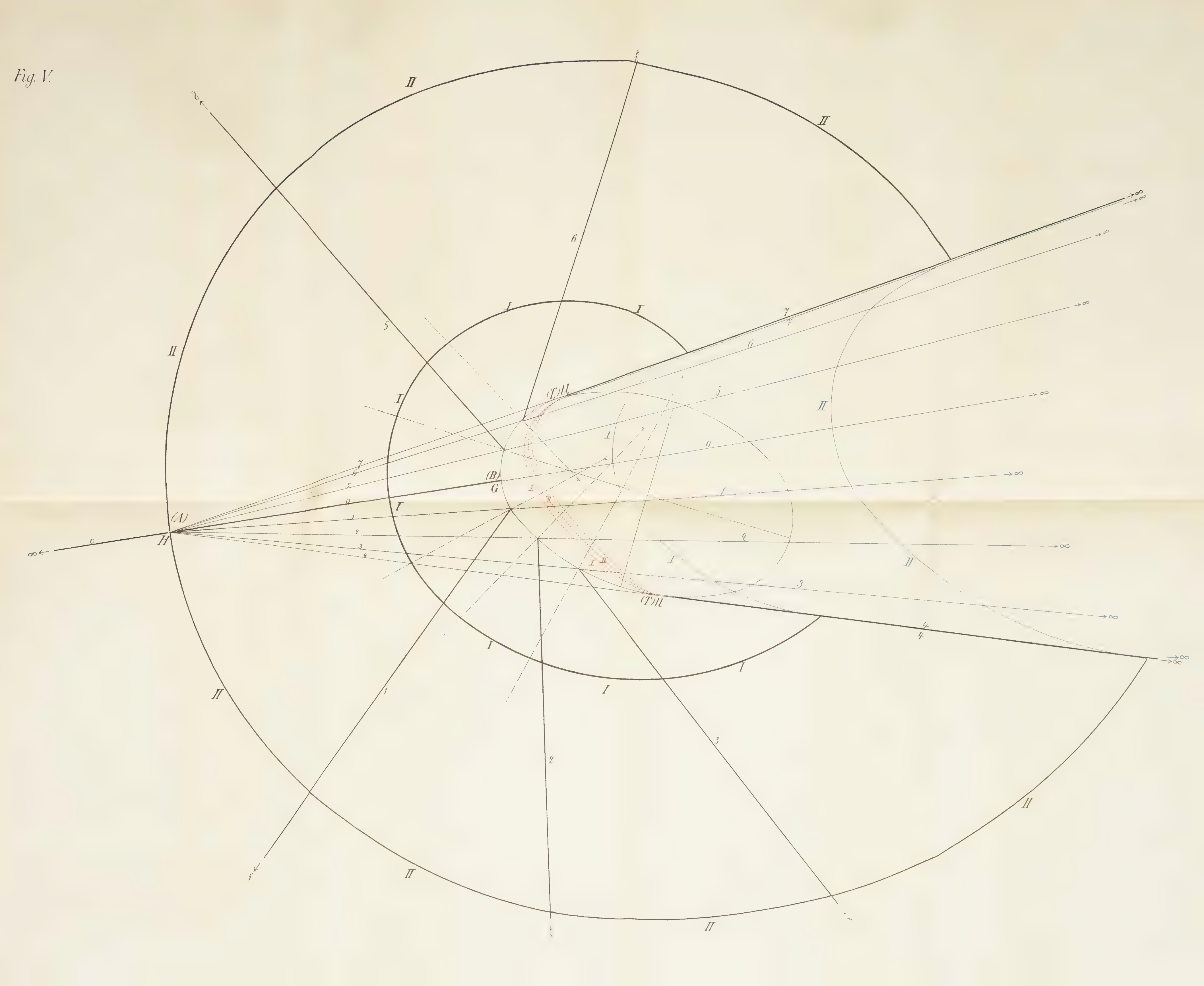


Fig. VI

0

II

I

0 I

5

II

I

5 I

6

II

I

6 I

1

II

I

1 I

2

II

I

2 I

3

II

I

3 I